Независимый Московский Университет,
Тета-функции и решётки, осень 2024

1

1.1. Изучите при фиксированном $q \in \mathbb{C}$, удовлетворяющим неравенству $|q| < 1$, сходимость ряда

$$Z \mapsto \Theta(Z|q) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n.$$

Уточнение. Установите *равномерную* сходимость этого ряда в любом кольце $0 < r < |Z| < R$.

1.2. Пользуясь доступными вам компьютерными средствами, постройте графики функций $x \mapsto \Theta(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}|\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} \tau})$ при нескольких мнимых $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$. Численно и графически проверьте функциональное уравнение и вещественные нули этих функций.

1.3. Найдите в каком-нибудь учебнике условие сходимости при любом $z \in \mathbb{C}$ ряда с комплексными коэффициентами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Функции, задаваемые такими рядами, называются *целыми*; множество целых функций обозначается $\mathcal{O}[\mathbb{C}]$. Проверьте, что множество $\mathcal{O}[\mathbb{C}]$ образует кольцо относительно поточечных операций. Распространите полученные результаты на другие известные вам нормированные поля.

1.4. Изучите поведение функции $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : (x, t) \mapsto \theta(x|\mathrm{i}t)$ при $t \to 0$. Если вы знакомы с обобщёнными функциями, сформулируйте полученный результат в терминах δ-функции Дирака.

1.5. Обоснуйте сходимость эйлеровского разложения синуса в произведение.

1.6. Пользуясь эйлеровским разложением синуса в произведение, вычислите значения

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \in \mathbb{Q}[\pi]$$

при $k = 1, 2, 3, 4$. Пользуясь доступными вам компьютерными средствами, экспериментально выясните, сколько слагаемых этого ряда дают заданную точность (то есть количество верных десятичных знаков), а затем обоснуйте полученные результаты теоретически.

13 сентября, *Г.Б. Шабат*