

**Независимый Московский Университет,
Тета-функции и решётки, осень 2024**

2

2.1. Дайте формальные определения всех отображений в (главной) диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}ar^+ & \xrightarrow{/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} & \mathcal{L}at \\ \downarrow /C^\times & & \downarrow /C^\times \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})} & \mathcal{M}_1(\mathbb{C}) \end{array}$$

и опишите их слои.

2.2. Докажите самостоятельно (или прочитайте где-нибудь) доказательство того, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, понимаемая как группа преобразований верхней полуплоскости вида $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, порождается преобразованиями $\tau \mapsto \tau + 1$ и $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$.

2.3. Докажите самостоятельно (или прочитайте где-нибудь) доказательство того, что *модулярная фигура*

$$\left\{ \tau \in \mathcal{H} \mid -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\}$$

является *фундаментальной областью* группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, действующей дробно-линейными преобразованиями на верхней полуплоскости.

2.4. Исследуйте *неподвижные точки* группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, действующей дробно-линейными преобразованиями на верхней полуплоскости.

2.5. Докажите сходимость произведения Вейерштрасса σ_Δ . Убедитесь, что с более короткой экспоненциальной поправкой сомножителей и вовсе без такой поправки произведение расходилось бы.

2.6. Докажите сходимость рядов Эйзенштейна $G_k(\Lambda)$ при всех $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Убедитесь, что выражение для $G_1(\Lambda)$ задавало бы (кажущийся бессмысленным) расходящийся ряд, однако для вырожденной решётки число $G_1(\mathbb{Z})$ имеет смысл.

2.7. Пользуясь доступными вам компьютерными средствами, найдите с разумной точностью разумное количество рядов Эйзенштейна квадратной решётки.

20 сентября, Г.Б. Шабат