

**Независимый Московский Университет,  
Тета-функции и решётки, осень 2024**

**3**

**3.1.** При любом  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  докажите *равномерную* сходимость в круге  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$  суммы

$$W_\Lambda(z) - \frac{1}{z} = \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \left( \frac{1}{z - \lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2} \right),$$

из которой выброшены слагаемые, имеющие полюса в этом круге.

**3.2.** При любом  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  докажите *равномерную* сходимость в круге  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$  суммы

$$\wp_\Lambda(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \left( \frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right),$$

из которой выброшены слагаемые, имеющие полюса в этом круге.

**3.3.** При любом  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  докажите *равномерную* сходимость в круге  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$  суммы

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^3}.$$

из которой выброшены слагаемые, имеющие полюса в этом круге.

**3.4.** Пользуясь доступными компьютерными средствами, численно проверьте равенство

$$W_\Lambda(z + \lambda) \equiv W_\Lambda(z) + 2W_\Lambda\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

для какой-либо решётки  $\Lambda \in \mathcal{L}at$  и наугад взятых  $\lambda \in \Lambda \setminus 2\Lambda$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ .

**3.5.** Пользуясь доступными компьютерными средствами, численно проверьте равенство

$$\sigma_\Lambda(z + \lambda) \equiv -e^{W_\Lambda\left(\frac{\lambda}{2}\right)(2z + \lambda)} \sigma_\Lambda(z)$$

для какой-либо решётки  $\Lambda \in \mathcal{L}at$  и наугад взятых  $\lambda \in \Lambda \setminus 2\Lambda$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ .

**3.6.** Изучите дифференциальное уравнение Вейерштрасса для вырожденной решётки  $\Lambda = 2\pi\mathbb{Z}$ .

**3.7.** Вычислите  $G_4, G_5 \in \mathbb{Q}[G_2, G_3]$ .

27 сентября, Г.Б. Шабат