

**Независимый Московский Университет,
Тета-функции и решётки, осень 2024**

4

4.1. Покажите, что длина эллипса, заданного уравнением $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$, с помощью подходящей подстановки задаётся интегралом

$$\text{Len}(A, B) := \int_0^{2\pi} \sqrt{A^2 \sin^2 \varphi + B^2 \cos^2 \varphi} \, d\varphi.$$

Подходящими заменами переменных выразите этот интеграл через *интегралы 1-го и 2-го рода*

$$I_1(k) := \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad I_2(k) := \int_{-1}^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

4.2. Найдите бирациональный изоморфизм¹ кривых, заданных уравнениями $v^2 = (u^2 + a^2)(u^2 + b^2)$ и $y^2 = x(x + ab) \left(x + \frac{(a+b)^2}{4} \right)$.

4.3. С помощью предыдущей задачи свяжите бирациональным изоморфизмом *лежандрову кватрику* и *лежандрову кубику*, то есть кривые, заданные уравнениями

$$v^2 = (1 - u^2)(1 - k^2u^2) \quad \text{и} \quad y'^2 = x'(x' - 1)(x' - t).$$

4.4. Аффинными преобразованиями представьте кубику Лежандра в Вейерштрассовой форме $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. В предположении вещественности исходных параметров, задающих эллипс, найдите число $\tau \in \mathcal{H}$, участвующее в *униформизации* $x = \wp(z|\tau), y = \wp'(z|\tau)$. Далее $\wp(-|\tau) =: \wp$.

4.5. Выразите интеграл 2-го рода, участвующий в предыдущих вычислениях, через *период* $\oint \frac{x dx}{y}$. Применяя униформизацию, преобразуйте неопределённый интеграл:

$$\int \frac{x dx}{y} = \int \frac{\wp d\wp}{\wp'} = \int \wp(z) dz.$$

Вспомнив функцию Вейерштрасса, удовлетворяющую $W' = -\wp$, преобразуйте рассматриваемый период к виду

$$\oint \frac{x dx}{y} = W(z_1) - W(z_2).$$

4.6. Воспользовавшись формулами из предыдущих задач и подходящими компьютерными средствами, вычислите длины нескольких эллипсов. В частности, обратившись к справочникам, вычислите расстояние, проходимое Землёй (в неподвижной Солнечной Системе), за год.

2 декабря, Г.Б. Шабат

¹Этот изоморфизм используется в теории *арифметико-геометрического среднего*, см. статью Шабата в "Математическом Просвещении" за 2020-й год.