

Независимый Московский Университет,
Тета-функции и решётки, осень 2024

5

Задачи, не уместившиеся в листок 4.

5.1. В эллиптическом интеграле 2-го рода

$$\int \frac{x dx}{y}$$

на кривой, заданной уравнением $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, воспользуйтесь униформизацией (то есть *заменой переменной*)

$$x = \wp_\Lambda(z), \quad y = \wp'_\Lambda(z)$$

для подходящей решётки (*периодов*) Λ . Выразите рассматриваемый интеграл через функцию W_Λ .

5.2. Пользуясь результатами предыдущей задачи, свяжите периоды дифференциалов 2-го рода с соотношением Лежандра.

5.3. С помощью доступных компьютерных средств численно проверьте результаты двух предыдущих задач для случая квадратной решётки $\Lambda = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$.

Задачи к лекции 5.

5.4. Пользуясь компьютерной алгеброй, найдите¹ несколько коэффициентов параболической модулярной формы

$$\Delta = q^{2n} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24}.$$

С доступной вам точностью проверьте её модулярность.

5.5. С доступной вам точностью проверьте формулы

$$E_2(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^{2n}, \quad E_3(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^{2n}$$
$$E_4(\tau) = 1 - 264 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n)q^{2n}, \quad E_5(\tau) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n)q^{2n}$$

для нормализованных рядов Эйзенштейна (рассмотрите несколько конкретных $\tau \in \mathcal{H}$). Проверьте соотношения $E_2^2 = E_4$, $E_2E_3 = E_5$.

5.6. Проверьте для нескольких $n \in \mathbb{N}$ равенство

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_5(m-n).$$

13 декабря, Г.Б. Шабат

¹Исправив опечатку в выложенном плане лекции 5...