


ТОПОЛОГИЯ-2

ЛИСТОК 1: СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции тора равно 7, а в триангуляции проективной плоскости — 6.
2. Постройте какую-нибудь триангуляцию бутылки Клейна. Какое минимальное число вершин у такой триангуляции?
3. Пусть I_k — отрезок единичной длины на плоскости \mathbb{R}^2 с концами $(0, 0)$ и $(\cos \frac{2\pi}{k}, \sin \frac{2\pi}{k})$. Определим $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ как подпространство в \mathbb{R}^2 с индуцированной топологией. Пусть $\sigma_k: \Delta^1 \rightarrow Y$ — линейное отображение отрезка Δ^1 на I_k . Докажите, что семейство отображений σ_k вместе с их ограничениями на вершины удовлетворяет условиям а) и б) из определения полусимплициального комплекса, но не удовлетворяет условию в). Таким образом, пространство Y представляет собой бесконечное объединение симплексов в \mathbb{R}^2 , примыкающих друг к другу по граням, но не является полусимплициальным комплексом.
4. Рассмотрим букет счётного числа отрезков $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1$. (По определению, букет — это факторпространство $(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1) / (\bigsqcup_{k=1}^{\infty} 0_k)$.) Докажите, что инъективные отображения $\sigma_k: \Delta_k^1 \rightarrow X$ вместе с их ограничениями на вершины задают на X структуру бесконечного (полу)симплициального комплекса, но X не вкладывается в \mathbb{R}^N ни для какого N (т. е. не гомеоморфно подмножеству \mathbb{R}^N с индуцированной топологией).
5. Докажите, что структура полусимплициального комплекса на пространстве X задаёт на нем структуру клеточного пространства.
6. Приведите пример клеточного разбиения пространства, которое не является структурой полусимплициального комплекса.
7. Пусть $X = S^1 \cup_{\varphi} D^2$ — клеточное пространство, получаемое приклеиванием к окружности S^1 (разбитой на две клетки) двумерной клетки по отображению $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ степени 3, $z \mapsto z^3$. Пространство X можно получить из треугольника отождествлением трёх его сторон в одну в соответствии с направлениями стрелок на рисунке:
 Задают ли характеристические отображения $\Delta^0 \rightarrow X$, $\Delta^1 \rightarrow X$ и $\Delta^2 \rightarrow X$ данного клеточного разбиения структуру полусимплициального комплекса?
8. Вычислите симплициальные гомологии бутылки Клейна, воспользовавшись структурой полусимплициального комплекса.
9. Вычислите симплициальные гомологии 2-мерной сферы S^2 , воспользовавшись триангуляцией или структурой полусимплициального комплекса.