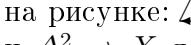


## ТОПОЛОГИЯ-2

### ЛИСТОК 1: СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что минимальное число вершин в триангуляции тора равно 7, а в триангуляции проективной плоскости — 6.
2. Постройте какую-нибудь триангуляцию бутылки Клейна. Какое минимальное число вершин у такой триангуляции?
3. Пусть  $I_k$  — отрезок единичной длины на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с концами  $(0, 0)$  и  $(\cos \frac{2\pi}{k}, \sin \frac{2\pi}{k})$ . Определим  $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$  как подпространство в  $\mathbb{R}^2$  с индуцированной топологией. Пусть  $\sigma_k: \Delta^1 \rightarrow Y$  — линейное отображение отрезка  $\Delta^1$  на  $I_k$ . Докажите, что семейство отображений  $\sigma_k$  вместе с их ограничениями на вершины удовлетворяет условиям а) и б) из определения полусимплексиального комплекса, но не удовлетворяет условию в). Таким образом, пространство  $Y$  представляет собой бесконечное объединение симплексов в  $\mathbb{R}^2$ , примыкающих друг к другу по граням, но не является полусимплексиальным комплексом.
4. Рассмотрим букет счётного числа отрезков  $X = \bigvee_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1$ . (По определению, букет — это факторпространство  $(\coprod_{k=1}^{\infty} \Delta_k^1) / (\coprod_{k=1}^{\infty} 0_k)$ .) Докажите, что инъективные отображения  $\sigma_k: \Delta_k^1 \rightarrow X$  вместе с их ограничениями на вершины задают на  $X$  структуру бесконечного (полу)симплексиального комплекса, но  $X$  не вкладывается в  $\mathbb{R}^N$  ни для какого  $N$  (т. е. не гомеоморфно подмножеству  $\mathbb{R}^N$  с индуцированной топологией).
5. Докажите, что структура полусимплексиального комплекса на пространстве  $X$  задаёт на нем структуру клеточного пространства.
6. Приведите пример клеточного разбиения пространства, которое не является структурой полусимплексиального комплекса.
7. Пусть  $X = S^1 \cup_{\varphi} D^2$  — клеточное пространство, получаемое приклеиванием к окружности  $S^1$  (разбитой на две клетки) двумерной клетки по отображению  $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$  степени 3,  $z \mapsto z^3$ . Пространство  $X$  можно получить из треугольника отождествлением трёх его сторон в одну в соответствии с направлениями стрелок  на рисунке:  Задают ли характеристические отображения  $\Delta^0 \rightarrow X$ ,  $\Delta^1 \rightarrow X$  и  $\Delta^2 \rightarrow X$  данного клеточного разбиения структуру полусимплексиального комплекса?
8. Вычислите симплексиальные гомологии бутылки Клейна, воспользовавшись структурой полусимплексиального комплекса.
9. Вычислите симплексиальные гомологии 2-мерной сферы  $S^2$ , воспользовавшись триангуляцией или структурой полусимплексиального комплекса.