

ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОК 10: (КО)ГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Пусть $A, B \subset X$ — такие подмножества, что пространство X покрыто их внутренностями. Постройте когомологическую последовательность Майера–Вьеториса $\dots \rightarrow H^*(A \cap B; G) \rightarrow H^*(A; G) \oplus H^*(B; G) \rightarrow H^*(X; G) \xrightarrow{\delta} H^{*+1}(A \cap B; G) \rightarrow \dots$, и опишите гомоморфизм δ .

2. Докажите, что в группе $H^1(X; \mathbb{Z})$ нет элементов кручения.

3. а) Для \mathbb{Z} -модулей $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n$ и \mathbb{Z} вычислите всевозможные их Tor 'ы и Ext 'ы.

б) Выведите: если гомологии пространства X имеют вид $H_n(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus T_n$, где T_n — конечная группа, то $H^n(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus T_{n-1}$.

4. Докажите: если отображение $f : X \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизм $H_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(Y; \mathbb{Z})$, то оно индуцирует изоморфизм (ко)гомологий с коэффициентами в любой абелевой группе. (Используйте теорему об универсальных коэффициентах.)

5. Вычислите группы $\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ и $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_4}^i(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$.

6. Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, M, N — R -модули.

а) Докажите, что $\text{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$ и $\text{Ext}_R^0(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)$.

б)* Докажите, что модули $\text{Tor}_i^R(M, N)$ и $\text{Ext}_R^n(M, N)$ не зависят, с точностью до изоморфизма, от выбора свободной резольвенты модуля M .

в)* Докажите, что $\text{Tor}_i^R(M, N) \cong \text{Tor}_i^R(N, M)$.

г) Докажите, что всякая короткая точная последовательность R -модулей $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ индуцирует длинные точные последовательности

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_i^R(M', N) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M, N) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M'', N) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^R(M', N) \rightarrow \dots,$$

$$\dots \leftarrow \text{Ext}_R^i(M', N) \leftarrow \text{Ext}_R^i(M, N) \leftarrow \text{Ext}_R^i(M'', N) \leftarrow \text{Ext}_R^{i-1}(M', N) \leftarrow \dots,$$

а короткая точная последовательность $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ — длинные точные последовательности

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, N') \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, N'') \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(M, N) \rightarrow \dots$$

Умножение в когомологиях.

7. а) При $n \leq \infty$ вычислите группы $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$, $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ и естественный гомоморфизм $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.

б) Опишите гомоморфизм Бокштейна $\beta : H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{*+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$.

в) Считая известным кольцо $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1} = 0)$, $\deg x = 1$, опишите умножение в $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$.

г) Докажите, что $H^*(\mathbb{R}P^{2k+1}; \mathbb{Z}) \simeq H^*(\mathbb{R}P^{2k} \vee S^{2k+1}; \mathbb{Z})$ как кольца, но эти пространства не гомотопически эквивалентны.

8. а) Пусть S_g — сфера с g ручками. Опишите умножение в $H^*(S_g; \mathbb{Z})$, используя отображения $S_g \rightarrow S_{g-1} \vee T^2$ и изоморфизм колец $H^*(T^2; \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[x, y]$.

б) Пусть S — замкнутая неориентируемая поверхность. Опишите умножение в $H^*(S; \mathbb{Z}_2)$ и $H^*(S; \mathbb{Z})$.