ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОК 3: ЕСТЕСТВЕННОСТЬ ГРУПП ГОМОЛОГИЙ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Проверьте, что граничное отображение $\partial\colon H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ гомологий цепных комплексов определено корректно и является гомоморфизмом.

2. Докажите, что $H_n(X, x_0) \cong \widetilde{H}_n(X)$ для любых $x_0 \in X$ и $n \geqslant 0$.

3. Выведите точную последовательность пары для приведённых гомологий:

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

4. Напомним, что *отображением пар* $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ называется отображение $f\colon X \to Y$, для которого $f(A) \subset B$. Докажите, что отображение пар индуцирует гомоморфизмы $f_*\colon H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$, $n \geqslant 0$.

5. Докажите, что если отображения $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ гомотопны в классе отображений пар (т. е. существует такая гомотопия $F\colon X \times I \to Y$ между f и g, что $F(A \times I) \subset B$), то индуцируемые ими отображения гомологий пар совпадают: $f_* = g_*\colon H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$, $n \geqslant 0$.

6. Докажите следующее свойство *естественности* гомологической последовательности пары: для отображения пар $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

7. Определите и докажите точность *гомологической последовательности тройки* для (X, A, B), где $B \subset A \subset X$:

$$\ldots \longrightarrow H_n(A,B) \xrightarrow{i_*} H_n(X,B) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,B) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X,B) \longrightarrow \ldots$$

8. Докажите, что включение $A \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизмы всех групп гомологий тогда и только тогда, когда $H_n(X,A) = 0$ для всех n.

9. Докажите при помощи групп гомологий *общую теорему Брауэра*: непрерывное отображение шара D^n в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.