ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОК 4: СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о пяти гомоморфизмах* (“5-лемма”). Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

абелевых групп с точными строками. Тогда

а) если f_2 и f_4 — мономорфизмы, а f_1 — эпиморфизм, то f_3 — мономорфизм;
б) если f_2 и f_4 — эпиморфизмы, а f_5 — мономорфизм, то f_3 — эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 — изоморфизмы, то и f_3 — изоморфизм.

2. Для отображения $f\colon S^n \to S^n$, $n > 0$, индуцированный гомоморфизм $f_*\colon H_n(S_n) \to H_n(S_n)$ есть отображение $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}$ умножения на некоторое целое число d. Это число называется *степенью* отображения f и обозначается $\deg f$.
Докажите следующие свойства степени:

а) $\deg \mathrm{id} = 1$;
б) $\deg f = 0$, если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не сюръективно;
в) $\deg f = \deg g$, если[1] отображения f и g гомотопны;
г) $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$;
д) Если $f\colon S^n \to S^n$ — симметрия относительно гиперплоскости, например $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$, то $\deg f = -1$;
е) Антиподальное отображение $S^n \to S^n$, $x \mapsto -x$, имеет степень $(-1)^{n+1}$.

3. а) Докажите, что если отображение $f : S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, то $\deg f = (-1)^{n+1}$.
б) Докажите, что при $n > 0$ любое отображение $S^n \to S^n$ гомотопно отображению, имеющему неподвижную точку.

4. Докажите, что на сфере S^n существует непрерывное поле ненулевых касательных векторов тогда и только тогда, когда n нечётно.

Говорят, что группа G *действует* на пространстве X, если для каждого элемента $g \in G$ задано непрерывное отображение $\alpha_g : X \to X$ такое, что $\alpha_e = \mathrm{id}$ и $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$. Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и любого $x \in X$ выполнено $\alpha_g(x) \neq x$.

5. Постройте свободное действие $\mathbb{Z}_n$ на S^{2k+1}.

6. Пусть группа G действует на S^{2k} свободно. Докажите, что $G = \mathbb{Z}_2$ или 0.

7. а) Докажите, что любое отображение $\mathbb{R}P^{2k} \to \mathbb{R}P^{2k}$ имеет неподвижную точку. (Сведите к отображению сфер с помощью теории накрытий.)
б) Постройте отображение $\mathbb{R}P^{2k+1} \to \mathbb{R}P^{2k+1}$ без неподвижных точек.

8. Для любых $n > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$ постройте отображение $f : S^n \to S^n$ степени k.

---

[1] Верно и обратное: если $\deg f = \deg g$, то f и g гомотопны. Это вытекает из изоморфизма $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, известного как *теорема Хопфа*.