ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОК 5: ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРУПП ГОМОЛОГИЙ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Вычислите гомологии **а)** произведения сфер $S^n \times S^m$ при $n, m \geq 2$;
б) трёхмерного тора $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$;
в) вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^n$;
г) связной суммы[1] произведений сфер $X = (S^2 \times S^4)\#(S^3 \times S^3)$;
д) пространства $X = T^2/\sim$, где $(x, y) \sim (y, x)$.

2. Докажите, что отображение факторизации $S^1 \times S^1 \to (S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1) \cong S^2$ не гомотопно нулю, но любое отображение $S^2 \to S^1 \times S^1$ гомотопно нулю.

3. Пусть N_g — замкнутая неориентируемая поверхность рода g, то есть сфера с g вклеенными листами Мёбиуса. Вычислите гомологии поверхности N_g, пользуясь клеточной структурой с одной нульмерной клеткой, g одномерными клетками $c_1, \ldots, c_g$ и одной двумерной клеткой, приклеенной по слову $c_1^2 c_2^2 \ldots c_g^2$.

4. **а)** Вычислите гомологии пространства X, полученного приклеиванием к $S^1 \vee S^1$ двух двумерных клеток по произвольным словам. Какие варианты возможны?
б) Рассмотрите случай слов $a^5 b^{-3}$ и $b^3(ab)^{-2}$. Тривиальна ли фундаментальная группа такого пространства?

5. Докажите, что для конечных клеточных пространств X, Y имеет место соотношение $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$.

6. Докажите, что если $X = A \cup B$, где X — конечное клеточное пространство, а A, B — его клеточные подпространства, то $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$. Докажите, что для произвольных подпространств это не так.

7. Докажите, что для n-листного накрытия $p : \widetilde{X} \to X$ над конечным клеточным пространством X имеет место соотношение $\chi(\widetilde{X}) = n\chi(X)$.

8. Докажите, что замкнутая ориентируемая поверхность M_g рода g может являться накрывающим пространством для поверхности M_h тогда и только тогда, когда $g - 1$ делится на $h - 1$.

---

[1] Связная сумма $M_1 \# M_2$ двух n-мерных многообразий M_1, M_2 определяется так: пусть M_i' получается из M_i вырезанием малого открытого n-мерного диска $(i = 1, 2)$. Тогда $M_1 \# M_2$ — это склейка M_1' и M_2' по граничной сфере S^{n-1}.