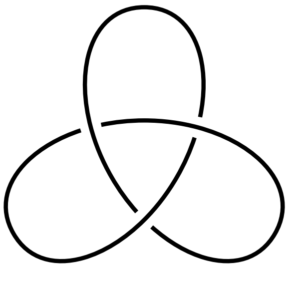
ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОК 6: РАССЛОЕНИЯ И КОРАССЛОЕНИЯ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть $f : S^n \to S^n$ — непрерывное отображение, $n > 0$, и пусть прообраз некоторой точки $y \in S^n$ состоит из конечного числа точек $x_1, \dots, x_m$. Пусть $U_i \ni x_i$ — непересекающиеся окрестности этих точек, такие что отображение f переводит их в какую-нибудь общую окрестность $V \ni y$.
а) Докажите, что включения $(V, V \setminus \{y\}) \hookrightarrow (S^n, S^n \setminus \{y\}) \hookleftarrow (S^n, \varnothing)$ индуцируют изоморфизмы на группах n-ых гомологий. Выведите, что каждое отображение $f|_{U_i} : (U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \to (V, V \setminus \{y\})$ индуцирует на n-ых гомологиях гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, то есть, является умножением на корректно определённое целое число $\deg f|_{x_i}$, не зависящее от выбора U_i и V, — *локальную степень f в точке x_i*.
б) Докажите, что $\deg f = \sum_{i=1}^{m} \deg f|_{x_i}$.

2. **а)** Отождествим $S^2 \setminus \{x\}$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Проверьте, что отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданное комплексным многочленом, единственным образом продолжается до непрерывного отображения $S^2 \to S^2$. Какая у него степень?
б) Отождествим $S^n \setminus \{x\}$ с пространством $\mathbb{R}^n$. Проверьте, что любое линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ единственным образом продолжается до непрерывного отображения $S^n \to S^n$. Какая у него степень?

3. Вычислите фундаментальную группу и группу первых гомологий пространства $\mathbb{R}^3 \setminus K$, где K — узел-трилистник.



4. Рассмотрим сферу $S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum |z_i|^2 = 1\}$ и отображение $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, $p(z_0, \dots, z_n) := [z_0 : \ldots : z_n]$. Докажите, что p — нетривиальное локально тривиальное расслоение со слоем S^1.

5. * Докажите, что любое локально тривиальное расслоение над кубом I^n тривиально (*теорема Фельдбау*).

6. **а)** Докажите, что все слои расслоения в смысле Гуревича (со связной базой) гомотопически эквивалентны.
б) Приведите пример такого отображения f, что все слои $f^{-1}(y)$ гомотопически эквивалентны, но f не является расслоением в смысле Гуревича.

7. Для расслоения в смысле Гуревича $p\colon E \to B$ обозначим через $F_b = p^{-1}(b)$ слой над точкой $b \in B$. Докажите, что каждому пути $\gamma\colon I \to B$ можно сопоставить отображение $h_\gamma\colon F_{\gamma(0)} \to F_{\gamma(1)}$ так, чтобы для гомотопных путей γ и γ' (с закреплёнными концами) отображения h_γ и $h_{\gamma'}$ были гомотопны, а для конкатенации путей $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ отображение $h_{\gamma_1 \cdot \gamma_2}$ было гомотопно композиции $h_{\gamma_2} \circ h_{\gamma_1}$. В частности, мы получаем, что все отображения h_γ являются гомотопическими эквивалентностями, а фундаментальная группа $\pi_1(B, b)$ действует (с точностью до гомотопии) на слое F_b.

8. Докажите, что для любого пространства X вложение основания в цилиндр $X \hookrightarrow X \times I$, $x \mapsto (x, 0)$, является корасслоением.

9. а) Докажите, что для любой точки x клеточного пространства X вложение $\{x\} \hookrightarrow X$ является корасслоением.
б) Придумайте пространство X и вложение $\{x\} \hookrightarrow X$, которое не является корасслоением.

10. Для произвольного отображения $f\colon X \to Y$ рассмотрим расслоение (всех) путей $p_0\colon Y^I \to Y$, $p_0(\gamma) = \gamma(0)$ и индуцированное из него с помощью отображения f расслоение $\widetilde{X} \to X$, то есть, декартов квадрат

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\pi"] & Y^I \arrow[d, "p_0"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y,
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{X} = \{(x, \gamma) \in X \times Y^I : f(x) = p_0(\gamma)\}$. Проверьте, что **а)** отображение $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ является гомотопической эквивалентностью, гомотопически обратной к отображению $h : X \to \widetilde{X}$, $h(x) = (x, c_{f(x)})$, где $c_{f(x)}$ — постоянный путь в точке $f(x)$;

б) композиция отображений $p : \widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{f}} Y^I \xrightarrow{p_1} Y$, где $p_1(\gamma) = \gamma(1)$, является расслоением в смысле Гуревича.
Таким образом, мы получили разложение произвольного отображения f в виде композиции $f = p \circ h$ расслоения и гомотопической эквивалентности.
в) Докажите, что отображение h является корасслоением.
г) Проверьте, что для всякого коммутативного квадрата $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "f"] & & X' \arrow[dr, "h'"] \arrow[dd, "f'"] & \\
& \widetilde{X} \arrow[rr] \arrow[dl, "p"] & & \widetilde{X}' \arrow[dl, "p'"] \\
Y \arrow[rr] & & Y' &
\end{tikzcd}$$

коммутативна (другими словами, полученное разложение естественно).
д) Сформулируйте и докажите двойственные утверждения (с заменой расслоений на корасслоения).

11. *Гомотопическим слоем* отображения f называется пространство $F(f)$, гомотопически эквивалентное слою расслоения p, такого что $f = p \circ h$, где h — гомотопическая эквивалентность. Докажите, что это определение корректно (то есть гомотопический тип пространства $F(f)$ не зависит от выбора разложения f в композицию расслоения и гомотопической эквивалентности). В частности, если f — расслоение, то его гомотопический слой совпадает с обычным.

12. Пусть $P(Y) \to Y$ — расслоение путей (начинающихся в отмеченной точке). Докажите, что гомотопический слой отображения $f\colon X \to Y$ входит в декартов квадрат $\begin{tikzcd} F(f) \arrow[r] \arrow[d] & P(Y) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$

13. Сформулируйте определение гомотопического кослоя отображения, двойственное понятию гомотопического слоя, и докажите его свойства, двойственные к задачам 11 и 12.

14. Найдите гомотопический слой и гомотопический кослой отображений:
а) $\mathrm{pt} \to X$; **б)** $X \to \mathrm{pt}$; **в)** $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$; **г)*** $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$.

15. Для отображения $f : X \to Y$ с гомотопическим слоем $F(f)$ и гомотопическим кослоем $C(f)$ найдите гомотопический слой отображения $F(f) \to X$ и гомотопический кослой отображения $Y \to C(f)$.