ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОК 7: ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

Если не сказано иное, (X, A, x_0) — пара топологических пространств с отмеченной точкой (то есть $x_0 \in A \subset X$).

1. Найдите гомотопические группы **а)** $S^1 \vee S^1$; **б)** сферы с двумя ручками.

2. Пусть X линейно связно. Постройте изоморфизмы групп $\pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$ при $n \geq 1$. (Придайте этому смысл при $n = 1$.)

3. Пусть $p : X' \to X$ — накрытие, $p(x_0') = x_0$. Докажите, что при $n \geq 2$ индуцированное отображение $p_* : \pi_n(X', x_0') \to \pi_n(X, x_0)$ является изоморфизмом.

4. Проверьте, что $\pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, A, x_0) \to \pi_0(A, x_0) \to \pi_0(X, x_0)$ — точная последовательность множеств с отмеченной точкой (образ каждого отображения равен прообразу тривиального элемента при следующем отображении).

5. а) Пусть $x_0, x_1 \in X$ лежат в одной компоненте линейной связности. Докажите, что каждый путь из x_0 в x_1 задаёт изоморфизм между $\pi_n(X, x_0)$ и $\pi_n(X, x_1)$. (Используйте отображение $S^n \to S^n \vee I$.) Докажите, что изоморфизм зависит только от гомотопического класса пути (с фиксированным концом и началом).
б) Постройте действие группы $\pi_1(X, x_0)$ на множестве $\pi_n(X, x_0)$ при всех $n \geq 1$.
в) Докажите, что $\pi_1(X, x_0)$ действует *гомоморфизмами* (каждый элемент $\pi_1(X, x_0)$ задаёт гомоморфизм $\pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$), если $n \geq 2$. Верно ли это при $n = 1$?
г) Пусть X является *H-пространством*, то есть задано отображение $\mu : X \times X \to X$ такое, что оба отображения $\mu(-, x_0)$ и $\mu(x_0, -)$ гомотопны тождественному. Докажите, что $\pi_1(X, x_0)$ абелева, а действие $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_n(X, x_0)$ тривиально.
д) Постройте действие группы $\pi_1(A, x_0)$ на $\pi_n(X, A, x_0)$. Докажите, что гомоморфизмы в точной последовательности пары согласованы с этим действием.

6. а) Пусть $E \to B$ — расслоение в смысле Гуревича со слоем F, причём для некоторого $n \geq 1$ действие $\pi_1(F)$ на $\pi_n(F)$ тривиально. Используя задачу 7 листка 6, постройте действие $\pi_1(B)$ на $\pi_n(F)$.
б) Проверьте, что конструкция из пункта а) применима к расслоению путей $\Omega X \to PX \to X$. Докажите, что изоморфизм $\pi_*(\Omega X) \cong \pi_{*+1}(X)$ отождествляет построенные выше действия $\pi_1(X)$ на $\pi_*(\Omega X)$ и $\pi_{*+1}(X)$.

7. Постройте *гомотопическую последовательность тройки* (X, A, B)

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0),$$

$(x_0 \in B \subset A \subset X)$, и докажите её точность.

8. Постройте локально тривиальное расслоение $p : S^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ со слоем S^1. Выведите, что $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$ и $\pi_k(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ при $k \neq 2$.

9. (*) Докажите, что S^1 и $\Omega\mathbb{C}P^\infty$ гомотопически эквивалентны. (например, за счёт вложения $\gamma : S^1 \to \Omega\mathbb{C}P^\infty$, $\gamma(\varphi)(t) = [e^{i\varphi}\cos \pi t : \sin \pi t : 0 : \ldots]$.)

10. Докажите, что пространства S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы, но они не гомотопически эквивалентны.