ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОК 8: ТЕОРЕМЫ ГУРЕВИЧА И УАЙТХЕДА

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть (X, A) — n-связная клеточная пара. Докажите, что существует клеточное пространство Z, получающееся из A приклеиванием клеток размерности $\geqslant n+1$, такое что пара (Z, A) гомотопически эквивалентна паре (X, A) (причём все гомотопии неподвижны на A).

2. а) Докажите: если отображение $f\colon X \to Y$ между линейно связными пространствами индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп, то оно индуцирует изоморфизм и всех групп гомологий.
б) Приведите пример отображения клеточных пространств $X \to Y$, которое индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и всех групп гомологий, но не индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп.
в) Приведите пример нестягиваемого пространства, у которого все приведённые группы гомологий равны нулю.

3. Проверьте, что $\pi_3(D^2, S^1) = 0$, но $\pi_3(D^2/S^1) = \mathbb{Z}$. Аналогично: если представить сферу в виде объединения двух полусфер $S^2 = D^2_+ \cup D^2_-$, то $\pi_3(S^2, D^2_+) = \mathbb{Z}$, но $\pi_3(D^2_-, D^2_+ \cap D^2_-) = 0$. Эти примеры показывают необходимость ограничения на размерности в теореме о гомотопическом вырезании.

4. а) Докажите, что для любого $n \geqslant 1$ и группы π (абелевой, если $n \geqslant 2$) существует клеточное пространство X такое, что $\pi_n(X) = \pi$ и $\pi_k(X) = 0$ при $k \neq n$.
б) Докажите, что такое клеточное пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.
Такие пространства называются *пространствами Эйленберга–Маклейна типа* $K(\pi, n)$.
в) Убедитесь, что пространства S^1, $\mathbb{R}P^\infty$, $\mathbb{C}P^\infty$, а также все замкнутые двумерные поверхности, за исключением S^2 и $\mathbb{R}P^2$, являются пространствами Эйленберга–Маклейна.
г) Пусть X — $(n-1)$-связное клеточное пространство, а пространство Y линейно связно и $\pi_i(Y) = 0$ при $i > n$. Докажите, что естественное отображение $[X, Y] \to \mathrm{Hom}(\pi_n(X), \pi_n(Y))$ биективно. (В частности, $[K(\pi, n), K(G, n)] \cong \mathrm{Hom}(\pi, G)$.)

5. Пусть X — клеточное пространство типа $K(\pi, 1)$, а X_n — его n-остов ($n \geq 2$). Докажите, что $\pi_n(X_n)$ — свободная абелева группа.

6. Пусть X — $(n-1)$-связное клеточное пространство, $n > 1$. Докажите, что гомоморфизм Гуревича $h\colon \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X; \mathbb{Z})$ сюръективен.

7. Докажите, что если $n > 1$, то $H_{n+1}(K(\pi, n); \mathbb{Z}) = 0$ для любой конечно порождённой абелевой группы π.

8. а) Докажите, что если для односвязного клеточного пространства X выполнено $H_i(X) \cong H_i(S^n)$ для всех i, то $X \simeq S^n$.
б) Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ и любой абелевой группы A существует единственное с точностью до гомотопической эквивалентности односвязное клеточное пространство X, такое что все приведённые группы гомологий X равны нулю, за исключением $H_n(X) = A$. Такое пространство называется *пространством Мура* $M(A, n)$.