ТОПОЛОГИЯ–2
ЛИСТОК 9: СКОБКА УАЙТХЕДА

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите:
а) Если n-мерное клеточное пространство n-связно, то оно стягиваемо.
б) Если n-мерное клеточное пространство X таково, что $\pi_i(X) = 0$ при $2 \leq i \leq n$, то X является пространством типа $K(\pi_1(X), 1)$.
в) Если отображение n-мерных клеточных пространств индуцирует изоморфизм на π_i при всех $i \leq n$, то оно является гомотопической эквивалентностью.

2. а) Определите действие группы $\pi_1(A)$ на всех $\pi_n(X, A)$.
б) Проверьте, что для гомоморфизма Гуревича $h\colon \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ выполнено равенство $h([\gamma] \cdot [f]) = h([f])$ для любых $[\gamma] \in \pi_1(A)$ и $[f] \in \pi_n(X, A)$.

3. Вычислите действие группы $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ на $\pi_n(\mathbb{R}P^n)$.

4. а) Докажите, что группа $\pi_7(S^4)$ содержит прямое слагаемое $\mathbb{Z}$.
б) Докажите, что если существует локально тривиально расслоение $S^k \to S^n \to S^m$, то $k = m - 1$ и $n = 2m - 1$.

5. Рассмотрим на сферах S^k и S^ℓ (k, $\ell \geq 1$) минимальные клеточные структуры из двух клеток и индуцированную клеточную структуру из четырёх клеток на произведении $S^k \times S^\ell$. Рассмотрим приклеивающее отображение для клетки старшей размерности $w\colon S^{k+\ell-1} \to S^k \vee S^\ell$. *Произведением Уайтхеда* двух сфероидов $f\colon S^k \to X$ и $S^l \to X$ называется сфероид $S^{k+l-1} \xrightarrow{w} S^k \vee S^l \xrightarrow{f \vee g} X$.
а) Проверьте, что отображение w имеет вид

$$S^{k+\ell-1} = \partial(D^k \times D^\ell) = D^k \times S^{\ell-1} \cup_{S^{k-1} \times S^{\ell-1}} S^{k-1} \times D^\ell \to S^k \vee S^\ell,$$

где последнее отображение составлено из отображений $D^k \times S^{\ell-1} \to D^k \to D^k/S^{k-1} = S^k \hookrightarrow S^k \vee S^\ell$ и $S^{k-1} \times D^\ell \to D^\ell \to D^\ell/S^{\ell-1} = S^\ell \hookrightarrow S^k \vee S^\ell$ и схлопывает пересечение $S^{k-1} \times S^{\ell-1}$ в точку.
б) Проверьте, что таким образом мы получаем корректное отображение

$$\pi_k(X) \times \pi_\ell(X) \xrightarrow{[-,-]} \pi_{k+\ell-1}(X).$$

в) Проверьте, что $[f, g] = 0$ тогда и только тогда, когда отображение $S^k \vee S^\ell \xrightarrow{f \vee g} X$ продолжается до отображения $S^k \times S^\ell \to X$.
г) Проверьте, что при $k = \ell = 1$ произведение Уайтхеда совпадает с коммутатором в фундаментальной группе, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in \pi_1(X)$.
д) Проверьте, что при $k = 1$, $\ell > 1$ произведение Уайтхеда связано с действием фундаментальной группы на высших гомотопических группах следующим образом: $[\alpha, f] = \alpha \cdot f - f$.
е) Докажите, что при гомоморфизме Гуревича все произведения Уайтхеда переходят в ноль, $h([f, g]) = 0 \in H_{k+\ell-1}(X)$.
ё) Докажите, что при гомоморфизме надстройки $\Sigma\colon \pi_{k+l-1}(X) \to \pi_{k+\ell}(\Sigma X)$ все произведения Уайтхеда переходят в ноль.
ж) Докажите, что если в пространстве X задано непрерывное умножение $\mu : X \times X \to X$, такое что отмеченная точка служит для него двусторонней единицей (никаких больше условий на умножение не накладывается), то все произведения Уайтхеда в гомотопических группах пространства X равны нулю.

з) Докажите, что произведение Уайтхеда градуированно кососимметрично: $[f, g] = (-1)^{k\ell}[g, f]$ (при $k, \ell > 1$).
и) Докажите, что произведение Уайтхеда билинейно: $[f, g+h] = [f, g] + [f, h]$ (при $\ell > 1$) и $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$ (при $k > 1$).
На самом деле, оно ещё удовлетворяет градуированному тождеству Якоби и задаёт на гомотопических группах структуру *градуированного кольца Ли*.

6. а) Докажите, что для образующих $\iota_2 \in \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ (класс тождественного отображения) и $\eta \in \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (класс отображения Хопфа $S^3 \to S^2$) выполнено равенство $[\iota_2, \iota_2] = 2\eta$.
б) Докажите, что первая стабильная гомотопическая группа сфер $\pi_1^s = \pi_4(S^3)$ равна 0 или $\mathbb{Z}/2$.

7. Докажите, что группа $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ не может свободно действовать ни на каких сферах.