Домашний письменный экзамен ПО АЛГЕБРЕ за третий семестр

Лектор: А. Городенцев. **Преподавтель: В. Долотин**

Письменный домашний экзамен является официальным способом получить отметку по курсу алгебры за третий семестр. В экзамене могут принять участие все желающие. Для этого необходимо в воскресенье 28 декабря 1997 года 10^{00} *лично прийти* в в МК НМУ, имея при себе *письменное решение* задач из предлагаемого ниже списка. Экзамен будет состоять в беседе с экзаменатором, цель которой – проверка Вашей письменной работы.

Полное решение каждой задачи[1] оценивается в 10 баллов. Для получения оценки «отлично» достаточно набрать не менее 90 баллов, для получения оценки «хорошо» — не менее 55 баллов, для получения оценки «удовлетворительно» — не менее 30 баллов.

Наличие зачёта по алгебре не является обязательным для участия в экзамене, но является необходимым для получения отметки в зачётку. Желающие получить зачёт должны обратится к преподавателям алгебры и получить от них *конкретное индивидуальное задание*, выполнения которго достаточно для получения зачёта.

Оценки, полученные на мехмате за третий семестр алгебры (как зачётная, так и экзаменационная) *вообще никак не учитываются* нами.

Задача 1. («симметрические тензоры») Пусть $u, v \in V$ – пара векторов. Представьте класс тензора

$$u \otimes v \otimes v + v \otimes u \otimes v + v \otimes v \otimes u$$

в S^3V линейной комбинацией тензоров вида $w^{\otimes 3}$ (т.е.«чистых кубов»). Верно ли, что над полем нулевой характеристики S^dV линейно порождается чистыми d-тыми степенями векторов из V при любом $d \geqslant 1$?

Задача 2. («полиномиальные инварианты матриц») Проверьте, что все многочлены от элементов матрицы $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, которые не меняются при любых заменах вида $A \longmapsto CAC^{-1}$ с $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ составляют подкольцо в кольце всех многочленов от матричных элементов матрицы A, и опишите это кольцо в терминах образующих и соотношений.

Задача 3. («звёздочка Ходжа») Покажите, что два семейства прямолинейных образующих невырожденной квадрики Q в $\mathbb{CP}_3 = \mathbb{P}(V)$ при плюккеровом вложении множества прямых в $\mathbb{P}(V)$ в $\mathbb{CP}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ изобразятся двумя невырождеными кривыми второго порядка, возникающими как сечения квадрики Плюккера парой непересекающихся двумерных проективных подпространств, натанутых на собственные (с собственными значениями ± 1) векторы линейного оператора $* : \Lambda^2 V \longrightarrow \Lambda^2 V$, определяемого тем, что

$$\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V \qquad (v_1 \wedge v_2) \wedge *(w_1 \wedge w_2) = \det \begin{pmatrix} q(v_1, w_1) & q(v_1, w_2) \\ q(v_2, w_1) & q(v_2, w_2) \end{pmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \ ,$$

где q – это симметричная билинейная форма на V, определяющая квадрику Q, а $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – произвольный ортонормальный базис для q в V.

Задача 4. («гауссовы биномиальные коэффициенты») Из скольки точек состоит грассманиан $G(k, n)$ над полем из q элементов?

[1] речь идёт именно о задачах, а не о пунктах задач

Задача 5. **(«след симметрической степени»)** Пусть $V \xrightarrow{F} V$ – линейный оператор в n-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$. Выразите $\mathrm{Tr}(S^2F)$ и $\mathrm{Tr}(S^3F)$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора F хотя бы при $n = 2, 3$. Верно ли, что производящая функция для полиномов, дающих выражение $\mathrm{Tr}(S^kF)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора F, имеет вид

$$\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{Tr}(S^kF)\cdot z^k = \frac{1}{\det(E - zF)}$$

Задача 6. **(«критерии разложимости поливектора»)** Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. По данному поливектору $\omega \in \Lambda^k V$ построим два подпространства

$$\Omega = \{\xi \in V^* \mid i_\xi(\omega) = 0\} \subset V^*$$
$$W = \{v \in V \mid v \wedge \omega = 0\} \subset V$$

Верно ли, что следующие ниже условия попарно эквивалентны:

а) ω разложим;

б) $\mathrm{Ann}\,\Omega = W$;

в) $i_{i_\omega(\xi)}(\omega) = 0$ в $\Lambda^{k-1}(V)$ $\forall \xi \in \Lambda^{k+1}V^*$;

г) $\omega \wedge i_\xi(\omega) = 0$ в $\Lambda^{k+1}(V)$ $\forall \xi \in \Lambda^{k-1}V^*$?

Задача 7. **(«оператор Казимира»)** Для каждого $F \in \mathfrak{sl}_2$ обозначим через $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\mathrm{ad}(F)} \mathfrak{sl}_2$ линейное отображение, действующее на $G \in \mathfrak{sl}_2$ по правилу

$$G \longmapsto \mathrm{ad}(F)G \stackrel{\mathrm{def}}{=} [F, G] = FG - GF\,.$$

Проверьте, что формула $\langle\, A\,,\ B\,\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(A)\circ \mathrm{ad}(B))$ задаёт невырожденную симметричную билинейную форму на $\mathfrak{sl}_2$ и вычислите базис $\{H^*, X^*, Y^*\}$ пространства $\mathfrak{sl}_2$, двойственный к стандартному базису базису $\{H, X, Y\}$ относительно этой формы (т.е. выразите H^*, X^* и Y^* через H, X и Y). Вычислите, как действует оператор $X^*X + Y^*Y + H^*H$ на стандартном неприводимом $\mathfrak{sl}_2$-модуле V_n.

Задача 8. **(«тензорные степени точного представления»)** Пусть $\mathfrak{G} \xrightarrow{\varrho} \mathrm{GL}(V)$ – эффективное (т.е. с $\ker\varrho = \{1\}$) представление конечной группы $\mathfrak{G}$. Докажите, что в разложениях его тензорных степеней встречается все неприводимые представления $\mathfrak{G}$.

Задача 9. **(«формула Молина»)** Пусть $\mathfrak{G} \xrightarrow{\varrho} \mathrm{GL}(V)$ – комплексное представление конечной группы $\mathfrak{G}$, и i_d — размерность пространства $\mathfrak{G}$-инвариантных однородных полиномов степени d на V (т.е. таких $f \in S^dV^*$, что $f(gv) = f(v)$ тождественно по v $\forall\, g \in \mathfrak{G}$, или, если угодно, инвариантных векторов представления $S^d(\varrho^*)$). Докажите, что производящая функция для последовательности целых чисел $\{i_d\}$ имеет вид

$$\sum_{n\geqslant 0} i_d\cdot z^n = \frac{1}{|\mathfrak{G}|}\sum_{g\in\mathfrak{G}} \frac{1}{\det(E - z\cdot\varrho(g))}\,.$$

Задача 10. **(«икосаэдр»)** Верно ли, что знакопеременная группа $\mathfrak{A}_5$ изоморфна собственной группе икосаэдра и собственной группе додекаэдра? Если да, то будут ли эти два трёхмерных представления $\mathfrak{A}_5$ изоморфны? Будут ли несобственные группы додекаэдра и икосаэдра изоморфны симметрической группе $\mathfrak{S}_5$? Опишите все неприводимые представления $\mathfrak{A}_5$ и составьте таблицу их характеров. Разложите на неприводимые естественное представление группы икосаэдра в пространстве комплекснозначных функций на множестве его вершин.

Задача 11. **(«симплициальное представление $\mathfrak{S}_n$»)** Рассмотрим тавтологическое представление симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathbb{C}^n$ перестановками базисных векторов. Убедитесь, что это представление является прямой суммой двух неприводимых – тривиального одномерного и $(n-1)$-го представления (несобственными) движениями, сохраняющими правильный $(n-1)$-мерный симплекс. Вычислите характеры тавтологического и симплициального представления. Далее:

а) Вычислите скалярный квадрат (относительно стандартной эрмитовой структуры на $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$) характера k-той внешней степени тавтологического представления (для этого удобно выбрать в $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)$ обычный базис $\{e_I\}$, занумерованный всевозможными k-элементными подмножествами

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\} \quad : \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k \ ,$$

и записывая действие перестановок матрицами в этом базисе, вычислить значение искомого характера χ на перестановке σ:

$$\chi(\sigma) = \sum_I \{\sigma\}_I \ , \quad \text{где} \qquad \{\sigma\}_I = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sigma|_I & , \text{ если } \sigma(I) \subset I \\ 0 & , \text{ если } \sigma(I) \subset I \end{cases} \quad ;$$

это значение следует подставить в явную формулу для скалярного произведения и аккуратно вычислить возникающую сумму, имея в виду, что совокупность перестановок σ, для которых $\{\sigma\}_I\{\sigma\}_J \neq 0$ есть прямое произведение симметрических групп — независимых перестановок элементов в инвариантных подмножествах $I \cap J$, $I \setminus I \cap J$, $J \setminus I \cap J$ и $\{1, 2, \dots, n\} \setminus (I \cup J)$).

б) Убедитесь, что все внешние степени симплициального представления симметрической группы неприводимы (для этого разложите внешнюю степень тавтологического представления в сумму подходящих внешних степеней симплициального представления).

Задача 12. **(«характер индуцированного представления»)**

а) Докажите, что значение характера представления конечной группы $\mathfrak{G}$, индуцированного с тривиального одномерного представления U подгруппы $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, вычисляется на данном классе сопряжённых элементов $C \subset \mathfrak{G}$ по формуле

$$\chi(C) = \frac{[\mathfrak{G} : \mathfrak{H}]}{|C|} \cdot |C \cap \mathfrak{H}| \ .$$

б) Разложим пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset \mathfrak{G}$ с подгруппой $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ в объединение $C \cap \mathfrak{H} = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_s$ классов $\mathfrak{H}$-сопряжённости. Докажите, что значение характера представления ϱ группы $\mathfrak{G}$, индуцированного с произвольного представления α подгруппы $\mathfrak{H}$, вычисляется по формуле

$$\chi_\varrho(C) = \frac{|G|}{|\mathfrak{H}|} \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{|D_i|}{|C|} \chi_\alpha(D_i) \ .$$

Задача 13. **(«$\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$»)** Опишите все неприводимые представления групп $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{S}_4$. Выясните, как устроены ограничения неприводимых представлений $\mathfrak{S}_4$ на $\mathfrak{S}_3$, и как устроены представления $\mathfrak{S}_4$, индуцированные с неприводимых представлений $\mathfrak{S}_3$ (предполагается, что $\mathfrak{S}_3$ вложена в $\mathfrak{S}_4$ как стабилизатор 4-го элемента).