Математический колледж НМУ

С.М.Натанзон

Лекции по математическому анализу для 1 курса

Осень 1997 года

Подготовили к печати: Ю.Климов, А.Корж, Ю.Кунецова, А.Смирнов.

Москва 1997

§1 Вещественные числа

Определение. Числовой прямой называется $-0-1-a-b-$. Вещественное число - это точка числовой прямой. Сложение $(a+b)$ - от конца отрезка a отложить отрезок b. $Q=\left\{\frac{m}{n}\right\}$ определим, как m раз отложенный отрезок $\frac{1}{n}$.

Задача 1.1. Доказать, что определение сложения эквивалентно $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

Определение. Бесконечной десятичной дробью называется C_0,C_1C_2K итак до бесконечности (где C_0 - целое число, а C_1,C_2,K - цифры). Естественная конструкция сопоставляет ему вещественное число.

Задача 1.2. Всякому вещественному числу отвечает бесконечная десятичная дробь.

Определение. Будем считать, что десятичная дробь $C_0,C_1C_2K\,C_k999K=C_0,C_1C_2K\,(C_k+1)000K$, где $C_k\neq 9$.

Определение. Десятичной последовательностью вещественного числа a, имеющего бесконечную десятичную дробь $C_0,C_1C_2K\,C_kK$, называется последовательность $\{r_k\}$, где $r_1=C_0,C_1$, $r_1=C_0,C_1C_2$, … , $r_k=C_0,C_1C_2K\,C_k$, … . Последовательности $r=(r_1,r_2,K)$ и $r'=(r_1',r_2',K)$ называются эквивалентными ($r\sim r'$), если $\forall(\varepsilon>0)\ \ \exists(n\in N)\ \ \forall(i>n)\ :\ |r_i-r_i'|<\varepsilon$.

Задача 1.3. Доказать, что если $r\sim r'$ и $r'\sim r''$, то $r\sim r''$.

Задача 1.4. Доказать, что несовпадающим вещественным числам отвечают не эквивалентные десятичные последовательности.

Определение. Последовательность r_1,r_2,K называется последовательностью Коши, если $\forall(\varepsilon>0)\ \ \exists(n\in N)\ \ \forall(i,j>n)\ :\ |r_i-r_j|<\varepsilon$.

Задача 1.5. Доказать, что бесконечная десятичная последовательность является последовательностью Коши.

Лемма 1.1. Пусть $a=(a_1,a_2,K)$ и $b=(b_1,b_2,K)$ - последовательности Коши. Тогда $(a+b)=((a_1+b_1),(a_2+b_2),K)$, $(-a)=((-a_1),(-a_2),K)$, $(a\cdot b)=((a_1\cdot b_1),(a_2\cdot b_2),K)$, и если $|a_i|>M>0$, то и $a^{-1}=(a_1^{-1},a_2^{-1},K)$ - тоже последовательности Коши.

Доказательство. Имеем, что $\forall(\varepsilon>0)\ \ \exists(n\in N)\ \ \forall(i,j>n)\ :\ |a_i-a_j|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ |b_i-b_j|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|(a_i+b_i)-(a_j+b_j)|=|(a_i-a_j)+(b_i-b_j)|\le|a_i-a_j|+|b_i-b_j|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Остальные доказательства проведите самостоятельно. ∝

Теорема 1.1. Всякая последовательность Коши эквивалентна десятичной последовательность вещественного числа.

Пусть $r=(r_1,r_2,K)$ - последовательность Коши. Отрезок $[a,b]\subset R$ назовем тяжелым, если содержит бесконечно много точек последовательности r.

Лемма 1.2. Если $[a,b]$ и $[c,d]$ тяжелые отрезки, то $[a,b]\cap[c,d]\neq\emptyset$.

Доказательство. В противном случае $\forall(n\in N)\ \ \exists(i,j>n)\ :\ r_i\in[a,b]\ \ r_j\in[c,d]$. Отсюда $|r_i-r_j|>c-b$ (если $b<c$). Но это противоречит определению последовательности Коши. ∝

Лемма 1.3. Если $[a,b]$ и $[b,c]$ тяжелые отрезки и $a<b<c$, то $\{r\}$ эквивалентна десятичной последовательности точки b.

Доказательство. $\forall(\varepsilon>0)\ \ \exists(n\in N)\ :\ 10^{-n}<\varepsilon$. Пусть (b_1,b_2,K) десятичная последовательность точки b, $b'=b_n-10^{-n-1}$, $b''=b_n+10^{-n}-10^{-n-1}$. Согласно лемме 1.2 в каждой из пар отрезков $([a,b'],[b',b''])$, $([b',b],[b'',c])$, $([a,b'],[b'',c])$ содержится не более одного тяжелого отрезка. Кроме того каждая из пар $([a,b'],[b',b])$ и $([b,b''],[b'',c])$ содержит не менее одного тяжелого отрезка. Следовательно $[a,b']$ и $[b'',c]$ - легкие (так как если $[a,b']$ - тяжелый, то $[b,b'']$ - легкий, то $[b'',c]$ - тяжелый, но $[a,b']\cap[b'',c]=\emptyset$ - противоречие). Таким образом начиная с некоторого $L\in N$ все $r_i\in[b',b'']$, при $i>L$. Ввиду того, что $b\in[b',b'']$ и $|b'-b''|<\varepsilon$, то отсюда следует, что $b_i\sim r_i$. ∝

Доказательство теоремы 1.1. Для каждого $n\in N$ разобьем R на отрезки $[l\cdot10^{-n},(l+1)\cdot10^{-n}]$, где $l\in Z$. Если есть разбиение с двумя тяжелыми отрезками, то по леммам 1.2 и 1.3 они имеют общую точку и ее десятичная последовательность эквивалентна $\{r_i\}$. А в противном случае, тяжелые отрезки образуют вложенную последовательность $[l_0,l_0+1]$, $[l_1\cdot10^{-1},(l_1+1)\cdot10^{-1}]$, …. Следовательно $\{r_i\}\sim\{l_i\cdot10^{-i}\}$, причем последняя является десятичной последовательность некоторого числа. ∝

Задача 1.7. Пусть $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ - десятичные последовательности чисел a и b. Доказать, что $\{a_i+b_i\}$ - десятичная последовательность числа $(a+b)$.

Определение. Пусть $a,b\in R$ и $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ - их десятичные последовательности. Согласно задаче 1.5 - это последовательности Коши. Согласно лемме 1.1 $\{a_i\cdot b_i\}$ - тоже последовательность Коши. Согласно теореме 1.1 она эквивалентна десятичной последовательности некоторого $c\in R$. Положим $a\cdot b\overset{def}{=}c$.

Задача 1.8. Доказать, что R - поле (в частности доказать, что $a(b+c)=ab+ac$).

§2 Пределы последовательностей

Определение. Говорят, что последовательность вещественных чисел a_1,a_2,K имеет предел a, если $\forall(\varepsilon>0)\ \ \exists(n\in N)\ \ \forall(i>n)\ :\ |a_i-a|<\varepsilon$. Пишут: $\lim\limits_{i\to\infty}a_i=a$.

Пример. Десятичная последовательность вещественного числа сходится к этому числу.

Задача 2.1. Всякая последовательность имеет не более одного предела. Любая бесконечная подпоследовательность имеет

тот же самый предел.

Теорема 2.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (a+b)$.

Доказательство. По условию $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(m\in N)\ \forall(n>m)$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит при $n>m$: $|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \le |a_n-a|+|b_n-b| < \varepsilon$. ∝

Задача 2.2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = (-a)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = a\cdot b$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{-1} = a^{-1}$, если $a\neq 0$.

Лемма 2.1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $a_n \ge b_n$, тогда $a \ge b$.

Доказательство. Пусть $a<b$, возьмем $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Получим, что $\exists(m\in N)\ \forall(n>m)$: $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$. Тогда $a_n < \frac{a+b}{2}$, а $b_n > \frac{a+b}{2}$. Но тогда $a_n < b_n$. Противоречие. ∝

Задача 2.3. Последовательность эквивалентная сходящейся сходится к тому же пределу.

Теорема 2.2. (Критерий Коши) Последовательность a_1, a_2, K имеет предел, если и только если она является последовательностью Коши.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(m\in N)\ \forall(n>m)$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, если $i,j>m$, то $|a_i - a_j| = |(a_i - a)+(a-a_j)| \le |a_i - a| + |a_j - a| < \varepsilon$. То есть это последовательность Коши. Обратно: если a_1, a_2, K последовательность Коши, то по теореме 1.1 она, эквивалентна десятичной последовательность некоторого числа и сходится к этому числу. ∝

Теорема 2.3. (Больцано-Вейерштрасса) Из всякой бесконечной последовательности на отрезке можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, K \in [b,c] = l_1$. Поделим l_1 пополам на $[b, b_1]$ и $[b_1, c]$. Один из них (назовем его l_2) содержит бесконечное число элементов последовательности. Разделим теперь его на две части и так далее. В результате мы получим бесконечную последовательно вложенных отрезков l_1, l_2, K, длина которых равна $\frac{c-b}{2^{i-1}}$ и стремится к нулю. Каждый из них содержит бесконечное число точек последовательности. Возьмем из каждого отрезка по одной точке $c_i \in l_i$. Тогда $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(m\in N)$ такое, что $|l_m| < \varepsilon$. Если при этом $i,j>m$, то $c_i, c_j \in l_m$, и значит $|c_i - c_j| < |l_i| < \varepsilon$. По критерию Коши c_1, c_2, K имеет предел. ∝

Задача 2.4. Из любого покрытия отрезка открытыми интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение. Последовательность a_1, a_2, K называется монотонно возрастающей, если $\forall(i\in N)\ a_{i+1} > a_i$, и монотонно убывающей, если $\forall(i\in N)\ a_i > a_{i+1}$.

Задача 2.5. Доказать, что ограниченная монотонно возрастающая последовательность имеет предел.

Определение. Говорят, что последовательность a_1, a_2, K стремится к $+\infty$, если $\forall(A\in R)\ \exists(n\in N)\ \forall(i>n)$: $a_i > A$. Обозначается $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = +\infty$. Аналогично к $-\infty$.

Задача 2.6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c\in R$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + c_n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot c_n) = +\infty$ (если $c>0$), $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^{-1}) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n^{-1}) = +\infty$ (если $c=0$ и $c_n>0$). Что можно сказать о пределах последовательностей $(a_n - b_n)$ и $\frac{a_n}{b_n}$?

§3 Пределы функций

Функция f на подмножестве $I\subset R$ - это отображение I на числовую ось R.

Определение. Пусть $c\in I$. Говорят, что f стремится к l при x стремящемся к c : $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$, если $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(\delta>0)\ \forall(0<|x-c|<\delta)$: $|f(x)-l| < \varepsilon$. Правый предел $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = l$ означает, что $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(\delta>0)\ \forall(0<x-c<\delta)$: $|f(x)-l| < \varepsilon$. Аналогично определяется левый предел $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = l$. При $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, если $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(\delta>0)\ \forall(x>\delta)$: $|f(x)-l| < \varepsilon$. Аналогично при $x\to-\infty$.

Задача 3.1. Если функция имеет предел, то он единственный.

Задача 3.2. Монотонная ограниченная функция имеет предел.

Теорема 3.1. Если $\lim\limits_{x\to c} f_1(x) = l_1$ и $\lim\limits_{x\to c} f_2(x) = l_2$, то существуют $\lim\limits_{x\to c}(f_1+f_2)(x) = l_1 + l_2$, $\lim\limits_{x\to c}(f_1\cdot f_2)(x) = l_1\cdot l_2$, $\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$ (если $l_2\neq 0$); если $f_1(x)\le f_2(x)$, то $l_1 \le l_2$.

Доказательство. Положим $\varepsilon>0$. Тогда $\exists(\delta>0)\ \forall(0<|x-c|<\delta)$: $|f_1(x)-l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f_2(x)-l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|(f_1(x)+f_2(x))-(l_1+l_2)| < \varepsilon$. Остальные доказательства проведите самостоятельно. ∝

Задача 3.3. Сформулировать и доказать критерий Коши для пределов функций.

Определение. Говорят, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, если $\forall(r\in R)\ \exists(\delta>0)\ \forall(0<|x-c|<\delta)$: $f(x) > r$. Аналогично для $-\infty$ и ∞.

Задача 3.4. Сформулируйте и докажите теорему о пределах функций, аналогичную теореме 3.1, для бесконечности.

Теорема 3.2. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, причем $\exists(\varepsilon_0>0)\ \forall(0<|x-a|<\varepsilon_0)$: $f(x)\neq b$, и $\lim\limits_{x\to b} g(x) = e$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = e$.

Доказательство. Положим $\varepsilon>0$, тогда $\exists(\delta_1>0)\ \forall(0<|y-b|<\delta_1)$: $|g(y)-e| < \varepsilon$. Кроме того

$\exists(\delta>0,\delta<\varepsilon_0)\ \ \forall(0<|x-a|<\delta)\ :\ 0<|f(x)-b|<\delta_1$. Значит, если $0<|x-a|<\delta$, то $0<|f(x)-b|<\delta_1$, и, следовательно, $|g(f(x))-e|<\varepsilon$. $\propto$

Задача 3.5. Что получится, если в теореме 3.2 убрать условие "$\exists(\varepsilon_0>0)\ \ \forall(0<|x-a|<\varepsilon_0)\ :\ f(x)\neq b$"?

Определение. Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x\to x_0$, если существует функция $h(x)$ в окрестности x_0 такая, что $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ в окрестности x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=1$. Обозначается $f\sim g$.

Пример. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=e$, то $f\sim e$ при $x\to x_0$.

Задача 3.6. Доказать, что $\sin(x)\sim x$ при $x\to 0$.

Задача 3.7. Если $f_1\sim f_2$ и $g_1\sim g_2$, то $f_1\cdot g_1\sim f_2\cdot g_2$ и $\dfrac{f_1}{g_1}\sim\dfrac{f_2}{g_2}$. Верно ли, что $f_1+g_1\sim f_2+g_2$?

Задача 3.8. Если $f_1\sim f_2$ и $f_2\sim f_3$, то $f_1\sim f_3$.

Определение. Если $f\sim a\cdot x^n$ при $x\to 0$, то говорят, что $f(x)$ есть бесконечно малая порядка n.

Обозначение. $f=o(g)$ при $x\to x_0$, если $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$. И $f=O(g)$, если $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, где $h(x)$ - ограничена.

§4 Непрерывные функции

Определение 1. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если $\forall(\varepsilon>0)\ \ \exists(\delta>0)\ \ \forall(|x-x_0|<\delta)\ :\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Определение 2. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Задача 4.1. Доказать равносильность определений.

Задача 4.2. Доказать, что f непрерывна в x_0, если и только если f переводит любую последовательность сходящуюся к x_0 в последовательность сходящуюся к $f(x_0)$.

Определение. f называется непрерывной справа в x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ и непрерывной слева, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

Определение. f называется непрерывной на $I\subset R$, если она непрерывна в каждой точке I.

Задача 4.3. Проверить на непрерывность все известные Вам функции.

Задача 4.4. Доказать, что суперпозиция, сумма, разность и произведение непрерывных функций f и g тоже непрерывна. И если $g(x)\neq 0$, то непрерывна и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Напомним, что подмножество $I\subset R$ называется ограниченным сверху (снизу), если существует $M\in R$ ($m\in R$) такое, что $I\le M$ ($I\ge m$).

Определение. Число $\sup(I)$ есть наименьшее из чисел b таких, что $b\ge I$. Число $\inf(I)$ есть наибольшее из чисел a таких, что $a\le I$.

Задача 4.5. Доказать, что всякое ограниченное сверху числовое множество имеет $\sup$, а всякое ограниченное снизу числовое множество имеет $\inf$.

Задача 4.6. Пусть ограниченное множество $I\subset R$ состоит из рациональных чисел. Может ли $\sup(I)$ или $\inf(I)$ быть не рациональным?

Определение. Пусть f - функция на I. Говорят, что f достигает максимума на I, если $\exists(y\in I)$ такой, что $f(I)\le f(y)$. И f достигает минимума на I, если $\exists(y\in I)$ такой, что $f(I)\ge f(y)$.

Теорема 4.1. Непрерывная функция на (замкнутом) отрезке $[a,b]$ достигает минимума и максимума.

Доказательство. Докажем сначала, что f ограничена сверху. Предположим противное. Тогда $\forall(n\in N)\ \exists(x_n\in[a,b])\ :\ f(x_n)>n$. В частности $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=+\infty$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса существует последовательность x_{n_1},x_{n_2},K имеющая предел $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i}=x\in[a,b]$. Тогда $f(x)=\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i})=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$, что невозможно. Пусть $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}(f(x))$. Тогда $\forall(n\in N)\ \exists(y_n\in[a,b])\ :\ M-\dfrac{1}{n}\le f(y_n)\le M$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=M$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса существует последовательность y_{n_1},y_{n_2},K имеющая предел $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i}=y\in[a,b]$. Но тогда $f(y)=\lim\limits_{i\to\infty} f(y_{n_i})=\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=M$. То есть f достигает максимума в y.

Задача 4.7. Провести аналогичное доказательство для минимума f. $\propto$

Задача 4.8. Верна ли эта теорема для (открытого) интервала (a,b)?

Теорема 4.2. Непрерывная функция f на $[a,b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. Пусть $f(a)<f(b)$ и $\mu\in(f(a),f(b))$. Положим $E=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)\le\mu\}$ и $c=\sup(E)$. Тогда $f(c)\le\mu<f(b)$, но $c\le b$ (так как $E\le b$), значит $c<b$. Докажем, что $f(c)=\mu$. Предположим, что $f(c)<\mu$. Положим $\alpha=\mu-f(c)>0$. Ввиду непрерывности f: $\exists(\delta>0)\ \ \forall(|c'-c|<\delta,c'<b)\ :\ |f(c')-f(c)|<\alpha$. Следовательно, для любого c' такого, что $b>c'>c$ и $c'-c<\delta$, имеем $f(c')<f(c)+\alpha=\mu$, откуда $c'\in E$. Итак мы имеем, что $c=\sup(E)>c'>c$, что невозможно. Случай, что $f(a)>f(b)$, разбирается аналогично. $\propto$

Следствие 4.1. Непрерывный образ отрезка является отрезком.

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Согласно теореме 4.1 существуют такие $c,d\in[a,b]$, что $f(c)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(d)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то есть $f([a,b])\subset[f(c),f(d)]$. Но согласно теореме 4.2 $[f(c),f(d)]\subset f(I)\subset f([a,b])$, где $I=[c,d]$, если $c<d$, и $I=[d,c]$, если $d<c$. Поэтому $f(I)\subset f([a,b])$ и $f([a,b])=[f(c),f(d)]$. $\propto$

Задача 4.9. Обязана ли быть непрерывной функция, переводящая любой отрезок в отрезок?

Определение. Говорят, что f и g взаимообратные функции, если $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Задача 4.10. Доказать, что строго монотонная непрерывная функция имеет обратную, она непрерывна, и ее график симметричен относительно прямой $y = x$.

§5 Равномерная непрерывность

Начиная с этого параграфа I - один из интервалов вида $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$.

Определение. Говорят, что функция f равномерно непрерывна на I, если $\forall(\varepsilon>0)\ \ \exists(\delta>0)\ \ \forall(|x-x'|<\delta, x, x'\in I)\ :\ |f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

Задача 5.1. Равномерно непрерывная функция непрерывна.

Пример. Функция $f(x)=x^2$ на R непрерывна. Если $x=\frac{1}{\delta}$, $x'=\frac{1}{\delta}+\delta$, то $|x-x'|<\delta$, но $|f(x)-f(x')|=\left|\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{\delta^2}-2-\delta^2\right|=2+\delta^2>2$. То есть $f(x)$ не равномерно непрерывна на R.

Теорема 5.1. Функция непрерывная на отрезке $[a,b]$ равномерно непрерывна на нем.

Доказательство. Предположим обратное, то есть пусть функция не равномерно непрерывна на отрезке. Тогда $\exists(\varepsilon>0)\ \ \forall(n\in N)\ \ \exists\left(|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\right)\ :\ |f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность x_{n_1}, x_{n_2}, K такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i}=x\in[a,b]$. Ввиду $\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_i}-y_{n_i})=0$ имеем $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i}=x$. Ввиду непрерывности $f(x)$ имеем, что $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i})=f(x)=\lim\limits_{i\to\infty} f(y_{n_i})$. Следовательно $|f(x_{n_i})-f(y_{n_i})|<\varepsilon$ для достаточно больших i. ∞

Пусть f_1, f_2, K - последовательность функций на I.

Определение. Говорят, что (f_1, f_2, K) поточечно сходится к f на I, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ для всех $x\in I$.

Определение. Говорят, что (f_1, f_2, K) равномерно сходится к f на I, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$. То есть $\forall(\varepsilon>0)\ \ \exists(m\in N)\ \ \forall(n>m)\ :\ \sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Задача 5.2. Если последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к f, то она поточечно сходится к f.

Пример. Функция $f_n(x)=x^n$ на $[0,1)$. Для каждой точки $x\in[0,1)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. Следовательно f_n поточечно сходится к $f(x)=0$. Однако $\sup\limits_{x\in[0,1)}(f_n(x)-0)=\sup\limits_{0\le x<1} x^n=1$ и равномерной сходимости нет.

Задача 5.2. Пусть последовательность $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ равномерно сходятся на I. Тогда последовательности $\{f_n+g_n\}$, $\{|f_n|\}$ и $\{\lambda\cdot f_n\}$ тоже равномерно сходятся.

Задача 5.3. Доказать, что если последовательность непрерывных функций равномерно сходятся к f, то f непрерывна.

§6 Производная

Определение. Функция дифференцируема в x_0, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Он называется производной в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Теорема 6.1. Если f дифференцируема в x_0, то $f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+h\cdot o(1)$ при $h\to 0$, т.е. $o(1)=\varepsilon(h)$, где $\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)=0$.

Доказательство. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Тогда $f(x_0+h)-f(x_0)=h(f'(x_0)+\varepsilon(h))$, где $\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)=0$. ∞

Следствие 6.1. Если f дифференцируема в x_0, то она непрерывна в x_0.

Доказательство. Если $f'(x_0)\ne0$, то $f(x_0+h)-f(x_0)\sim h\cdot f'(x_0)\to0$, при $h\to0$. Случай, когда $f'(x_o)=0$, разберите самостоятельно. ∞

Задача 6.1. Дать определения: а) производной справа; б) производной слева; в) производная равна 1) $+\infty$; 2) $-\infty$.

Задача 6.2. Доказать, что $(u+v)'=u'+v'$, $(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v'$, $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, $(u\cdot v)^{(n)}=\sum C_n^i\cdot u^{(i)}\cdot v^{(n-i)}$. Если $v\ne0$, то $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

Теорема 6.2. Предположим, что $u(x)$ дифференцируема в x_0, а $f(x)$ дифференцируема в $u(x_0)$. Тогда $F(x)=f(u(x))$ дифференцируема в x_0 и $F'(x_0)=f'(u(x_0))\cdot u'(x_0)$

Доказательство. Пусть $u_0=f(x_0)$. Согласно теореме 6.1 имеем, что $f(u_0+h)=f(u_0)+h\cdot g(h)$, где $\lim\limits_{h\to0} g(h)=f'(u_0)$, и $u(x_0+h)=u(x_0)+h\cdot v(h)$, где $\lim\limits_{h\to0} v(h)=u'(x_0)$. Поэтому $F(x_0+h)=f(u(x_0+h))=f(u_0+h\cdot v(h))=f(u_0)+h\cdot v(h)\cdot g(h\cdot v(h))=F(x_0)+h\cdot v(h)\cdot g(h\cdot v(h))$. Отсюда $F'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to0} v(h)\cdot g(h\cdot v(h))=\left(\lim\limits_{h\to0} v(h)\right)\cdot\left(\lim\limits_{h\to0} g(h\cdot v(h))\right)=u'(x_0)\cdot f'(u_0)$. ∞

Задача 6.3. Если $f(-x)=f(x)$, то $f'(-x)=-f'(x)$.

Задача 6.4. Пусть $f'(x_0)>0$. Тогда $\exists(\varepsilon>0)\ \ \forall(0<\delta<\varepsilon)\ :\ f(x_0-\delta)<f(x_0)<f(x_0+\delta)$.

Теорема 6.3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимообратные, $f(x)$ дифференцируема в x_0 и $f'(x_0)\neq 0$. Тогда $g(x)$ дифференцируема в $y_0=f(x_0)$ и $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Пусть $I\subset R$ — окрестность x_0, где f монотонна и $Y=f(I)$. Согласно следствию 6.1 и задаче 4.10 $g(y)$ непрерывна на Y. В этой окрестности для $x=g(y)$ имеем: $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]^{-1}=[f'(x_0)]^{-1}$. $\propto$

Задача 6.5. Сформулировать и доказать аналогичные теоремы в случае $f'(x_0)=0$.

Задача 6.6. Найти производные всех функций элементарной математики.

§7 Производная на интервале

Определение. Говорят, что $f(x)$ дифференцируема на интервале $I\subset R$, если она дифференцируема в каждой точке I.

В этом параграфе мы считаем, что f непрерывна на $I=[a,b]$, где $a<b$, и дифференцируема на (a,b).

Определение. Говорят, что $x_0\in(a,b)$ - точка локального максимума на (a,b), если $\exists(\alpha>0)\ \ \forall(|x-x_0|<\alpha)\ :\ f(x)\le f(x_0)$. Аналогично определяется локальный минимум.

Теорема 7.1. (Ферма) Производная в точке локального минимума и максимума равна нулю.

Доказательство. Пусть $x_0\in(a,b)$ - точка локального минимума. $0\le\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. Следовательно, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$. $\propto$

Теорема 7.2. (Ролль) Если $f(a)=f(b)$, то $\exists(c\in(a,b))$ такое, что $f'(c)=0$.

Доказательство. Если $\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)=f(a)=f(b)$, то $f(x)=\text{const}$ и $f'(x)=0$ на всем (a,b). В противном случае или минимальное, или максимальное значение функции достигается на (a,b) (они существуют на $[a,b]$, согласно теореме 4.1). Согласно теореме 7.1 в этой точке $f'(x)=0$. $\propto$

Теорема 7.3. (Лагранж) Существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c)$.

Доказательство. Положим $\varphi(x)=(f(x)-f(a))-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$. Тогда $\varphi(a)=0=\varphi(b)$. По теореме 7.2 $\exists(c\in(a,b))$, где $0=\varphi'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\propto$

Следствие 7.1.

1) $f(x)=\text{const}\Leftrightarrow f'(x)=0$ на (a,b);
2) $f(x)$ — возрастает $\Leftrightarrow f'(x)\ge 0$ на (a,b);
3) если $f'(x)>0$ на (a,b), то $f(x)$ строго возрастает.

Задача 7.1. Верно ли обратное утверждение к пункту 3?

Теорема 7.4. (Коши) Если f и g - непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $g'(x)\neq 0$ на (a,b), то существует $c\in(a,b)$ такое что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. По теореме 7.3 $g(b)\neq g(a)$ и левая часть определена. Положим $F(x)=(f(x)-f(a))-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(b))$. Тогда $F(b)=f(b)-f(a)=F(a)$. Согласно теореме 7.2 $\exists(c\in(a,b))\ :\ 0=F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$. $\propto$

Теорема 7.5. (Лопиталь) Пусть f и g непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), $f(a)=g(a)=0$ и $g'(x)\neq 0$ на (a,b). Тогда, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$.

Доказательство. Согласно теореме 7.4 $\forall(x\in(a,b))\ \ \exists(c(x)\in(a,x))\ :\ \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c(x)\to a}\dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. $\propto$

Теорема 7.6. Пусть f и g определены и дифференцируемы на $[a,+\infty)$, $a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ и $g'(x)\neq 0$ на $[a,+\infty)$. Тогда, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Положим $t=\frac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to 0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0$ и $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Кроме того, если $\tilde{g}(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$, то $\tilde{g}'(t)=g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\neq 0$ на $[a,+\infty)$. Согласно теореме 7.5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f'(1/t)\cdot\left(-1/t^2\right)}{g'(1/t)\cdot\left(-1/t^2\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. ∝

Теорема 7.7. Пусть f и g непрерывны на $(a,b]$ и дифференцируемы на (a,b), $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ и $g'(x)\neq 0$ на (a,b). Тогда если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Пусть $K=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(\delta>0)\ \forall(|x-a|<\delta)$: $K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<K+\frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $a<x<x_0<a+\delta$. Согласно теореме Коши $\exists(c\in(x,x_0))$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, то есть $K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}<K+\frac{\varepsilon}{2}$. Но $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}h(x)$, где $h(x)=\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}$. Следовательно, $\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot h^{-1}(x)\le\frac{f(x)}{g(x)}\le\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot h^{-1}(x)$. Но $\lim\limits_{x\to a} h(x)=1$ и, следовательно, $\left|\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. ∝

Задача 7.1. Сформулировать и доказать справедливость правила Лопиталя для $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$ и в случае $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$.

§8 Интеграл

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ функции f на отрезке $[a,b]$ - это площадь фигуры, ограниченной графиком f, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$. При этом площадь областей, лежащих выше оси Ox, берется со знаком плюс, а ниже - со знаком минус. Осталось определить, что такое площадь.

Определение. Ступенчатой функцией, отвечающей разбиению $a=x_0<x_1<K<x_n=b$ называется такая функция f, что $f(x)=c_i$, где $x\in(x_i,x_{i+1}]$ $(0\le i<n)$, и $f(a)=c_0$. Для такой функции $\int\limits_a^b f(x)\,dx\overset{def}{=}\sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i\cdot(x_{i+1}-x_i)$.

Задача. Доказать, что сумма и произведение ступенчатых функций тоже ступенчатая. При этом верно, что $\int\limits_a^b (f+g)(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\int\limits_a^b g(x)\,dx$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\le\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема-Определение 8.1. Пусть f непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Тогда:

1) Существует последовательность ступенчатых функций f_1,f_2,K равномерно сходящаяся к f на отрезке $[a,b]$;

2) Последовательность $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ также сходится.

3) Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\overset{def}{=}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависит от выбора $\{f_n\}$ и называется интегралом функции f на отрезке $[a,b]$.

Доказательство.

1) Согласно теореме 5.1 $\forall(n\in N)\ \exists(\delta>0)\ \forall(|x-x'|<\delta)$: $|f(x)-f(x')|<\frac{1}{n}$. Рассмотрим произвольное разбиение, мелкость которого меньше δ (то есть $x_{i+1}-x_i<\delta$). Положим $f_n(x)=f(x_i)$ при $x\in(x_i,x_{i+1}]$. Тогда $|f(x)-f_n(x)|<\frac{1}{n}$ на отрезке $[a,b]$. Значит, $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на отрезке $[a,b]$.

2) Пусть $\{f_n\}$ равномерно сходится к f. Тогда $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(m\in N)\ \forall(n>m)$: $|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{4\cdot(b-a)}$. Тогда $\forall(n,n'>m)$ имеем $|f_n(x)-f_{n'}(x)|=|(f_n(x)-f(x))+(f(x)-f_{n'}(x))|<\frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}$. Следовательно

$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f_{n'}(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f_{n'}(x)|\,dx \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}\,dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Таким образом, согласно критерию Коши, последовательность $\left\{\int_a^b f_n(x)dx\right\}$ сходится.

3) Пусть $\{g_n\}$ другая последовательность ступенчатых функций, равномерно сходящаяся к f. Тогда последовательность $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$ равномерно сходится к f. По пункту 2 имеем, что последовательность $\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b g_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx, \int_a^b g_2(x)\,dx, \ldots$ сходится. Но $\left\{\int_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ и $\left\{\int_a^b g_n(x)\,dx\right\}$ - две ее подпоследовательности, следовательно, имеют одинаковый предел. ∝

Задача 8.2. Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Доказать, что

1) $\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,dx = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,dx$;

2) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$;

3) $\min_{x\in[a,b]} f(x) \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le \max_{x\in[a,b]} f(x)$;

4) $\exists(c\in[a,b])\ :\ \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Задача 8.3. Пусть f и g непрерывные функции на отрезке $[a,b]$. Тогда $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. Если $f(x)\le g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. Верно ли, что $\int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx$?

Определение. Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$ (то есть $a<b$). Положим $\int_b^a f(x)\,dx \overset{def}{=} -\int_a^b f(x)\,dx$.

Задача 8.4. Доказать, что для любых точек $\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$ верно следующее: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$.

Задача 8.5. Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(x)\ge 0$ и $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Доказать, что $f(x)=0$.

Теорема 8.3. (Неравенство Коши-Шварца) Если f и g непрерывные функции на отрезке $[a,b]$, то $\left(\int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$.

Доказательство. Обозначим $B = \int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx$, $A = \int_a^b f^2(x)\,dx$, $C = \int_a^b g^2(x)\,dx$. Тогда получим, что $A\cdot z^2 + 2\cdot B\cdot z + C = \int_a^b (z\cdot f(x) + g(x))^2\,dx \ge 0$. Следовательно, дискриминант $B^2 - AC \le 0$, если $A\ne 0$. Случай $A=0$ следует из задачи 8.5. ∝

Итак, мы задали скалярное произведение в линейном пространстве непрерывных функций - $(f,g) \overset{def}{=} \int (f\cdot g)(x)\,dx$.

Задача 8.6/7. (Метод прямоугольников и трапеций) Будем аппроксимировать интеграл суммой площадей прямоугольников и трапеций. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ точками $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ на n равных отрезков. На полуинтервале аппроксимируем f функцией $g_n(x) = f(x_i)$ для метода прямоугольников, и функцией $h_n(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\cdot(x - x_i)$ для метода трапеций. Доказать, что $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g_n(x)\,dx\right| \le M_1\cdot\frac{(b-a)^2}{2\cdot n}$ и $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b h_n(x)\,dx\right| \le M_2\cdot\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}$, где $M_1 = \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ и $M_2 = \sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

§9 Первообразная

Определение. Функция F называется первообразной f, если она дифференцируема и $F' = f$.

Теорема 9.1. Множество первообразных функции f имеет вид $\{F + \lambda \mid \lambda\in R\}$, где $F' = f$.

Доказательство. Если $G = F + \text{const}$, то $G' = F' = f$. Если $G' = F' = f$, то $(G-f)' = 0$ и по следствию 7.1 $G - F = \text{const}$. ∝

Теорема 9.2. (Теорема Ньютона-Лейбница) Пусть f непрерывна на интервале $I\subset R$. Тогда $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ - первообразная f, при $x, x_0 \in I$.

Доказательство. По задаче 8.4 имеем, что $F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$. По задаче 8.2 имеем, что $\min_{t\in[x,x+h]} f(t) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le \max_{t\in[x,x+h]} f(t)$. Ввиду непрерывности f получаем, что $f(x)=\lim_{h\to o}\left(\min_{t\in[x,x+h]} f(t)\right) \le \lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right) \le \lim_{h\to 0}\left(\max_{t\in[x,x+h]} f(t)\right)=f(x)$. Следовательно, $F'(x)=f(x)$. ∝

Следствие 9.1. Если F - первообразная непрерывной функции f на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Обозначение. Семейство первообразных $\{F(x)|F'(x)=f(x)\}$ обозначается $\int f(x)\,dx$ и называется неопределенным интегралом.

Задача 9.1. (Интегрирование по частям) Доказать, что $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ и $\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a) - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx$.

Теорема 9.3. (Замена переменной) Пусть $\varphi: J\to R$ и $f: I\to R$ - непрерывны и $\varphi(J)\subset I$. Тогда $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Пусть F - первообразная f. Тогда $F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем, что $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$. ∝

Задача 9.2. Доказать следующие формулы:

1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + const \quad (n\in Z,\ n\ne -1)$;

2) $\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln|x| + const_1, & x>0 \\ \ln|x| + const_2, & x<0 \end{cases}$;

3) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + const, \quad \int \cos(x)\,dx == \sin(x) + const$;

4) $\int a^x\,dx == \frac{a^x}{\ln a} + const$;

5) $\int sh(x)\,dx = ch(x) + const, \quad \int ch(x)\,dx = sh(x) + const$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + const, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + const$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arcsh(x) + const = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + const$.

Задача 9.3. Пусть $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+2\cdot b\cdot x+c)^n}$ при $c>b^2$. Обозначим через $\Delta = \sqrt{c-b^2}$. Тогда $I_1 = \frac{arctg\left(\frac{x+b}{\Delta}\right)}{\Delta} + const$ и $I_n = \frac{x+b}{2\cdot\Delta^2\cdot(n-1)\cdot(x^2+2\cdot b\cdot x+c)^{n-1}} + \frac{2\cdot n-3}{2\cdot\Delta^2\cdot(n-1)}\cdot I_{n-1} + const$ при $n>1$. И $\int \frac{x\,dx}{x^2+2\cdot b\cdot x+c} = \frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+2\cdot b\cdot x+c| - b\cdot I_1 + const$, $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2\cdot b\cdot x+c)^n} = -\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot(x^2+2\cdot b\cdot x+c)^{n-1}} - b\cdot I_n + const$ при $n>1$.

Задача 9.4. Всякая рациональная функция разлагается следующим образом: $\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot x^i}{\sum_{i=1}^m \beta_i\cdot x^i} = R(x) + \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_j^i}{(x+a_i)^{\lambda_i}} + \sum_{i=1}^l\sum_{j=1}^{\gamma_i} \frac{B_j^i\cdot x + C_j^i}{(x^2+2\cdot b_i\cdot x+c_i)^{\gamma_i}}$, где R - полином-частное, знаменатель последней дроби $x^2+2\cdot b_i\cdot x+c_i$ не имеет корней, то есть $b_i^2 - c_i < 0$, а остальные дроби находятся методом неопределенных коэффициентов.

Вместе с задачами 9.2 и 9.3 это дает метод интегрирования всех рациональных функций.

§10 Как интегрировать рациональные комбинации элементарных функций

I. Напомним, что рациональная функция - это $f(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot x^i}{\sum_{j=1}^m \beta_j\cdot x^j}$, где $\alpha_i,\beta_i\in R$. Они интегрируются в 2 шага:

1) Представляются в виде $f(x) = R(x) + \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{A_j^i}{(x+a_i)^{\lambda_i}} + \sum_{i=1}^l\sum_{j=1}^{\gamma_i} \frac{B_j^i\cdot x + C_j^i}{(x^2+2\cdot b_i\cdot x+c_i)^{\gamma_i}}$, где $R(x)$ - вещественный многочлен, $A_j^i, B_j^i, C_j^i, a_i, b_i, c_i \in R$ и $c_i > b_i^2$. (задача 9.4).

2) Интегрирование функций $\frac{A_j^i}{(x+a_i)^{\lambda_i}}$, $\frac{B_j^i\cdot x}{(x^2+2\cdot b_i\cdot x+c_i)^{\gamma_i}}$, $\frac{C_j^i}{(x^2+2\cdot b_i\cdot x+c_i)^{\gamma_i}}$ (задача 9.3).

У нас есть только теорема существования разложения $\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot x^i}{\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot x^j}=R(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda_i}\frac{A_j^i}{(x+a_i)^{\lambda_i}}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\gamma_i}\frac{B_j^i\cdot x+C_j^i}{(x^2+2\cdot b_i\cdot x+c_i)^{\gamma_i}}$, но как найти коэффициенты $k,l,\lambda_i,\gamma_i,a_i,b_i,c_i$? Будем действовать так:

a) Разложить $\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot x^j=\prod(x+a_i)\cdot\prod(x^2+2\cdot b_i\cdot x+c_i)$ и тем самым найти $k,l,\lambda_i,\gamma_i,a_i,b_i,c_i$.

b) Написать равенство $\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot x^i}{\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot x^j}=R(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\lambda_i}\frac{A_j^i}{(x+a_i)^{\lambda_i}}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\gamma_i}\frac{B_j^i\cdot x+C_j^i}{(x^2+2\cdot b_i\cdot x+c_i)^{\gamma_i}}$, где $R(x)$ - частное от деления $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot x^i$ на $\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot x^j$, а A_j^i,B_j^i,C_j^i - неизвестные.

c) Привести выражение к общему знаменателю и получить равенство двух полиномов

d) Уравнять коэффициенты полиномов - получить систему уравнений на A_j^i,B_j^i,C_j^i и решить эту систему.

Пример. Найти $\int\frac{3}{x^3-1}dx$:

1) Разложить $\frac{3}{x^3-1}$:

a) $\frac{3}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\cdot x+C}{x^2+x+1}$;

b) $3=A\cdot(x^2+x+1)+(B\cdot x+C)\cdot(x-1)=A\cdot x^2+A\cdot x+A+B\cdot x^2+C\cdot x-B\cdot x-C=(A+B)\cdot x^2+(A+C-B)\cdot x+(A-C)$;

c) $\begin{cases}A+B=0\\A+C-B=0\\A-C=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-A\\C=B-A=-2\cdot A\\3=A-C=3\cdot A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-2\end{cases}$;

d) $\frac{3}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x-2}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+x+1}-2\cdot\frac{1}{x^2+x+1}$.

2) Интегрируем полученные дроби:

a) $\int\frac{dx}{x-1}=\begin{cases}\ln|x-1|+Const_1, & x>1\\ \ln|x-1|+Const_2, & x<1\end{cases}$;

b) $\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}+Const=\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+Const$;

c) $\int\frac{x}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+Const$;

d) Итого: $\int\frac{3\,dx}{x^3-1}=\begin{cases}\ln|x-1|-2\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)+Const_1, & x>1\\ \ln|x-1|-2\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right)+Const_2, & x<1\end{cases}=$

$=\begin{cases}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+x+1|-\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot x+1}{\sqrt{3}}\right)+Const_1, & x>1\\ \ln|x-1|-\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+x+1|-\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot x+1}{\sqrt{3}}\right)+Const_2, & x>1\end{cases}$.

II. Пусть $f(t)$ - рациональная функция. Найдем $\int f(e^t)\,dt$. Положим $x=e^t$ и $t=\ln(x)$. Тогда $\int f(e^t)\,dt=\int\frac{f(e^t)}{e^t}\cdot e^t\,dt=\int\frac{f(e^t)}{e^t}\cdot(e^t)'\,dt=\int\frac{f(x)}{x}dx$ - интеграл от рациональной функции.

Пример. $\int\frac{e^{3\cdot t}+1}{e^t+1}dt=\int f(e^t)\,dt$, где $f(x)=x^2-x+1$. Положим $x=e^t$. Тогда $\int f(e^t)\,dt=\int\frac{x^2-x+1}{x}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot x^2-x+\ln|x|+Const\quad(x>0)=\frac{1}{2}\cdot e^{2t}-e^t+t+Const$.

III. Пусть $f(u,v)$ - рациональная функция, т.е. $f(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, где $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ - полиномы. Найдем $\int f(\cos(x),\sin(x))$. Положим $x=\varphi(t)=2\cdot\operatorname{arctg}(t)$ и $t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Тогда $\cos(x)=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $\sin(x)=\frac{2\cdot\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1+\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$. $\varphi'(t)=\frac{2}{1+t^2}$.

$\int f(\cos(x),\sin(x))\,dx=\int f(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2\cdot 2t}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$ - интеграл от рациональной функции.

Пример. $\int\frac{dx}{3+\cos(x)}=\int\frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{1}{2+t^2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}(\frac{t}{\sqrt{2}})+\text{Const}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}(\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{\sqrt{2}})+\text{Const}$

IV. Пусть $f(u,v)$ - рациональная функция. Найдем $\int f(x,\sqrt[m]{\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}})\,dx$. Положим $t=\sqrt[m]{\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}}$. Тогда $x=\varphi(t)=\frac{d\cdot t^m-b}{-c\cdot t^m+a}$ и $\varphi'(t)=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{(-c\cdot t^m+a)^2}\cdot m\cdot t^{m-1}$. Имеем $\int f(x,\sqrt[m]{\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}})\,dx=\int f(\frac{d\cdot t^m-b}{-c\cdot t^m+a},t)\cdot\frac{a\cdot d-b\cdot c}{(-c\cdot t^m+a)^2}\cdot m\cdot t^{m-1}\,dt$ - рациональная функция.

Пример. $\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$. $t=\sqrt{x+1}$, $x=t^2-1$, $x'=2\cdot t$.

$\int\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx=\int\frac{t}{t^2-1}\cdot 2\cdot t\,dt=\int\frac{2\cdot t^2}{t^2-1}\,dt=\int\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2t+\ln|t-1|-\ln|t+1|+\text{Const}_{1,2,3}=$

$=2\cdot\sqrt{x+1}+\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|-\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+\text{Const}_{1,2}$.

Комбинируя эти подстановки можно интегрировать любую рациональную функцию, такие как e^t, $\cos(t)$, $\sin(t)$ и $\sqrt[m]{\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}}$.

§11 Формула Тейлора

Формула Тейлора - это полином для аппроксимации $f(x)$ в окрестности точки x_0.

Теорема 11.1. (Тейлор-Коши) Пусть $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную $f^{(n)}(x)$. Тогда $f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}\cdot f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}\cdot f''(a)+K+\frac{(b-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(t)\,dt$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по n. Для $n=1$ имеем $f(b)=f(a)+\int_a^b f(t)\,dt$. Предположим, что теорема доказана для $n=N$ и $f^{(N+1)}(x)$ - непрерывна. Интегрируем по t и используем предположение индукции: $\int_a^b\frac{(b-t)^N}{N!}\cdot f^{(N+1)}(t)\,dt=\int_a^b\frac{(b-t)^N}{N!}\cdot\left(f^{(N)}(t)\right)'\,dt=\frac{(b-t)^N}{N!}\cdot f^{(N)}(t)\Big|_a^b+\int_a^b\frac{(b-t)^{(N-1)}}{(N-1)!}\cdot f^{(N)}(t)\,dt=-\frac{(b-a)^N}{N!}\cdot f^{(N)}(a)+f(b)-$

$-\left(f(a)+\frac{b-a}{1!}\cdot f'(a)+K+\frac{(b-a)^{(N-1)}}{(N-1)!}\cdot f^{(N-1)}(a)\right)$. То есть $f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}\cdot f'(a)+K+\frac{(b-a)^{(N-1)}}{(N-1)!}\cdot f^{(N-1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^{(N-1)}}{(N-1)!}\cdot f^{(N)}(t)\,dt$. $\propto$

Лемма 11.1. Пусть $g(x)\ge 0$ и непрерывна на $[a,b]$. Тогда существует такое $c\in[a,b]$, что $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=f(c)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Положим $m=\min_{x\in[a,b]}f(x)$ и $M=\max_{x\in[a,b]}f(x)$. Тогда $m\le f(x)\le M$ и согласно задаче 8.3 $m\cdot\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b m\cdot g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\le\int_a^b M\cdot g(x)\,dx=M\cdot\int_a^b g(x)\,dx$. Отсюда $m\le\frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\le M$. Согласно теореме 4.2

$\exists(c\in[a,b])\ :\ f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$. $\propto$

Теорема 11.2. (Тейлор-Лагранж) Пусть f имеет на $[a,b]$ непрерывную $f^{(n)}(x)$. Тогда существует $c\in[a,b]$ такое, что $f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}\cdot f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}\cdot f''(a)+K+\frac{(b-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(c)$.

Доказательство. Согласно лемме 11.1 $\int_a^b \frac{(b-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(t)\,dt = f^{(n)}(c)\cdot\int_a^b \frac{(b-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\,dt = f^{(n)}(c)\cdot\left(-\frac{(b-t)^n}{n!}\Big|_a^b\right) = f^{(n)}(c)\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}$, где $c\in[a,b]$. Теперь восподьзуеися теоремой 11.1. ∝

Теорема 11.3. (Тейлор-Юнг) Пусть $f^{(n)}(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $x_0\in(a,b)$. Тогда $f(x_0+h) = f(x_0)+\frac{h}{1!}\cdot f'(x_0)+K+\frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)+h^n\cdot o(1)$.

Доказательство. Согласно теореме 11.2 $f(x_0+h) = f(x_0)+\frac{h}{1!}\cdot f'(x_0)+K+\frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(x_0)+\frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(c)$, где $c\in[x_o-|h|,x_o+|h|]$. Рассмотрим $g(h) = \frac{1}{h^n}\cdot\left(\frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(c)-\frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\right)$. Тогда $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$, то есть $g(h) = o(1)$. Тогда $\frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(c) = \frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)+h^n\cdot o(1)$. Значит $f(x_0+h) = f(x_0)+\frac{h}{1!}\cdot f'(x_0)+K+\frac{h^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)+h^n\cdot o(1)$. ∝

Задача 11.3. Доказать утверждение теоремы 11.2 без предположения о непрерывности $f^{(n)}(x)$.

§12 Разложение Тейлора

Представление $f(x) = f(x_0)+a_1\cdot(x-x_0)+K+a_n\cdot(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\cdot o(1)$ при $x\to x_0$ называется разложением Тейлора степени n. Если кроме того $x_0 = 0$, то разложением Маклорена.

Задача 12.1. Доказать, что разложение Тейлора степени n единственно.

Теорема 12.1. Если $f^{(n)}(x)$ непрерывна в окрестности x_0, то разложение Тейлора степени n в окрестности x_0 существует и $a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$.

Доказательство. Существование следует из Теоремы 11.3. Единственность - задача 12.1, а формула $a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$ из теоремы 11.3 и единственности. ∝

Задача 12.2. Доказать существование следующих разложений Маклорена:

1) $a^x = 1+\frac{\ln(a)}{1!}\cdot x+K+\frac{\ln^n(a)}{n!}\cdot x^n+x^n\cdot o(1)$ и в частности $e^x = 1+\frac{x}{1!}+K+\frac{x^n}{n!}+x^n\cdot o(1)$;

2) $ch(x) = 1+\frac{x^2}{2!}+K+\frac{x^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}+x^{(2\cdot n+1)}\cdot o(1)$;

3) $sh(x) = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+K+\frac{x^{(2\cdot n+1)}}{(2\cdot n+1)!}+x^{(2\cdot n+2)}\cdot o(1)$;

4) $\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+K+(-1)^n\cdot\frac{x^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}+x^{(2\cdot n+1)}\cdot o(1)$;

5) $\sin(x) = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+K+(-1)^n\cdot\frac{x^{(2\cdot n+1)}}{(2\cdot n+1)!}+x^{(2\cdot n+2)}\cdot o(1)$;

6) $(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}\cdot x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+K+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot K\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n+x^n\cdot o(1)$.

Задача 12.3. Как выражаются разложения Тейлора функций $f+g$, $f\cdot g$, f^{-1} и $f\circ g$ через разложения Тейлора f и g.

Теорема 12.2. Пусть разложение Тейлора $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i\cdot x^i+x^n\cdot\alpha(1)$ таково, что функция $\alpha(x) = o(1)$ - дифференцируема и $\alpha'(x)$ - ограничена. Тогда 1) $f'(x) = a_1+a_2\cdot x+K+n\cdot a_n\cdot x^{n-1}+x^{n-1}\cdot o(1)$ и 2) $\int_0^x f(t)\,dt = a_o\cdot x+\frac{a_1}{1!}\cdot x^2+K+\frac{a_n}{n+1}\cdot x^{(n+1)}+x^{(n+1)}\cdot o(1)$.

Доказательство. 1) $f'(x) = \left(\sum_{i=0}^n a_i\cdot x^i\right)'+n\cdot x^{(n-1)}\cdot\alpha(x)+x^n\cdot\alpha'(x) = \left(\sum_{i=0}^n a_i\cdot x^i\right)'+x^{(n-1)}\cdot o(1)$. 2) Положим $F(x) = \int_o^x f(t)\,dt$. Согласно теореме 11.4 существует разложение Тейлора $F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i\cdot x^i+x^{n+1}\cdot o(1)$. Применяя к нему пункт 1) находим, что $\sum_{i=0}^n a_i\cdot x^i+x^n\cdot\alpha(1) = f(x) = F'(x) = \sum_{i=1}^{n+1} i\cdot b_i\cdot x^{i-1}+x^n\cdot\alpha(1)$. ∝

Разложения Тейлора удобна для поиска пределов.

Пример. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-x^2\cdot\cos(x)}{x^2\cdot(1-\cos(x))}$:

a) $\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+x^4\cdot o(1)$;

b) $\sin^2(x) = x^2-\frac{x^4}{3}+x^4\cdot o(1)$;

c) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \cdot o(1)$;

d) $x^2 \cdot \cos(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + x^5 \cdot o(1)$;

e) $\sin^2(x) - x^2 \cdot \cos(x) = \frac{x^4}{6} + x^4 \cdot o(1)$;

f) $x^2 \cdot (1 - \cos(x)) = x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x^3 \cdot o(1) \right) = \frac{x^4}{2} + x^5 \cdot o(1)$.

Следовательно $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{x^2 \cdot (1 - \cos(x))} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{6} + x^4 \cdot o(1)}{\frac{x^4}{2} + x^5 \cdot o(1)} = \frac{1}{3}$.

Задача 12.4. Существует ли несовпадающие функции с совпадающим разложением Тейлора всех порядков?

§13 Локальное поведение кривых на плоскости

Определение. Параметризованной кривой на плоскости называется вектор-функция (то есть пара функций) $f(x) = \{x(t), y(t)\}$, $f : I \to R^2$. Множество $\{(x(t), y(t)) \in R^2 \mid t \in I\}$ называется множеством точек кривой. В частности, разные параметрические кривые могут иметь одинаковое множество точек.

Пример.

1) $I_1 = R$, $f_1(\psi) = \{a \cdot ch(\psi), b \cdot sh(\psi)\}$. Но если положить $x = a \cdot ch(\psi)$ и $y = b \cdot sh(\psi)$, то $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ch^2(\psi) - sh^2(\psi) = \left(\frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^{\psi} - e^{\psi}}{2} \right)^2 = 1$.

2) $I_2 = (0, +\infty)$, $f_2(t) = \left\{ \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(t + \frac{1}{t} \right) \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left(t - \frac{1}{t} \right) \right\}$. Тогда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\left(t + \frac{1}{t} \right)^2 - \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 \right) = 1$.

3) $I_3 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $f_3 = \left(\frac{a}{\cos(\varphi)}, b \cdot tg(\varphi) \right)$. Тогда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} - \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = 1$.

Определение. Пусть $f : I \to R^2$ - параметризованная кривая и $s : J \to I$, где $s(J) = I$. Тогда говорят, что кривая $g = (f \circ s) : J \to R^2$, получается из кривой $f(t)$ заменой параметра t на s. Такая кривая g имеет то же самое множество точек.

Пример. Пусть $s(\psi) = e^{\psi}$, $s : I_1 \to I_2$, то $f_1 = f_2 \circ s$, где I_1, I_2, f_1 и f_2 - из предыдущего примера.

Определение. Параметризованная кривая $f(t) = \{x(t), y(t)\}$ называется непрерывной, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны; и дифференцируемой, если $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы. Кривая $f^{(n)}(t) \overset{def}{=} \{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$ называется n-ой производной кривой $f(t)$.

Теорема 13.1. (Тейлор-Юнг для кривых). Пусть $f : [a, b] \to R^2$ - параметризованная кривая такая, что кривая $f^{(n)}$ непрерывна и $t_0 \in [a, b]$. Тогда $f(t_0 + h) = f(t_0) + \frac{h}{1!} \cdot f'(t_0) + K + \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(t_0) + h^n \cdot \{o(1), o(1)\}$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \{x(t), y(t)\}$. Тогда теорема 11.3, примененная к функциям x и y дает $\{x(t_0 + h), y(t_0 + h)\} = \{x(t_0), y(t_0)\} + \frac{h}{1!} \{x'(t_0), y'(t_0)\} + \frac{h^n}{n!} \{x^{(n)}(t_0), y^{(n)}(t_0)\} + h^n \cdot \{o(1), o(1)\}$. А это и есть утверждение теоремы. ∝

Пример. $f(t) = \{\cos(t), \sin(t)\}$ - круг. Тогда $f(h) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(0)}{1!} \cdot h^2 + h^2 \cdot \{o(1), o(1)\}$. Подставляя имеем, что $f(h) = \{\cos(0), \sin(0)\} + \{-\sin(0), \cos(0)\} \cdot h + \{-\cos(0), -\sin(0)\} \cdot \frac{h^2}{2} + h^2 \cdot \{o(1), o(1)\} = \{1,0\} + \{0,1\} \cdot h + \left\{ -\frac{1}{2}, 0 \right\} \cdot h^2 + \{o(1), o(1)\} \cdot h^2$.

Определение. Говорят, что $f : I \to R^2$ имеет касательную в $t_0 \in I$, если:

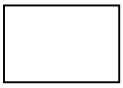
1) $\exists (\varepsilon > 0) \quad \forall (|t - t_0| < \varepsilon) \ : \ f(t) \neq f(t_0)$;

2) Прямая l_t, проходящая через точки $f(t)$ и $f(t_0)$ имеет предельное положение при $t \to t_0$ (то есть угол наклона кривой l_t имеет предел при $t \to t_0$).

Теорема 13.2. Пусть $f : I \to R^2$ - параметризованная кривая такая, что $f'(t_0) = K = f^{(n-1)}(t_0) = 0$ и $f^{(n)}(t_0) \neq 0$. Тогда f имеет касательную в t_0 вида $l(s) = f(t_0) + f^{(n)}(t_0) \cdot s$.

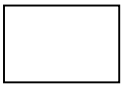
Доказательство. Согласно теореме Тейлора-Юнга $f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} \cdot (t - t_0)^n + (t - t_0)^n \cdot \{o(1), o(1)\}$. Отсюда $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{(t - t_0)^n} = \frac{f^{(n)}(t_o)}{n!} \neq 0$, откуда следует условие 1) в определении. При каждом t через точки $f(t)$ и $f(t_0)$ проходит прямая $l_t(s) = f(t_0) + \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \cdot \left(\frac{n!}{(t - t_0)^{n-1}} \cdot s \right) = f(x_0) + f^{(n)}(t_0) \cdot s + \{o(1), o(1)\} \cdot s$. Следовательно, предел $\lim\limits_{t \to t_0} l_t$ существует и равен прямой $l(s) = f(t_0) + f^{(n)}(t_0) \cdot s$. ∝

Опишем теперь поведение кривой относительно касательной. Пусть $f^{(i)}(t_0)=0$ для $i<p$, $f^{(p)}(t_0)\neq 0$, $f^{(i)}(t_0)=\lambda_i\cdot f^{(p)}(t_0)$, при $p\le i<q$, и вектор $f^q(t_0)$ не параллелен вектору $f^p(t_0)$. Тогда согласно теореме Тейлора-Юнга $f(t_0+h)-f(t_o)=\frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}\cdot h^p+\frac{f^{(p+1)}(t_0)}{(p+1)!}\cdot h^{p+1}+K+\frac{f^{(q-1)}(t_0)}{(q-1)!}\cdot h^{q-1}+\frac{f^q(t_0)}{q!}\cdot h^q+h^q\cdot\{o(1),o(1)\}=\xi(h)\cdot f^{(p)}(t_0)+\zeta(h)\cdot f^{(q)}(t_0)+h^q\cdot\{o(1),o(1)\}$, где $\xi(h)=\frac{h^p}{p!}+h^p\cdot o(1)$ и $\zeta(h)=\frac{h^q}{q!}+h^q\cdot o(1)$. Рассмотрим отдельные разные случаи:

1) p -нечетное, q - четное. Тогда ξ имеет знак h , а $\zeta\ge 0$. 

2) p -нечетное, q - нечетное. Тогда ξ и ζ имеют знак h .

3) p -четное, q - нечетное. Тогда $\xi\ge 0$ и ζ имеет знак h .

4) p -четное, q - четное. Тогда $\xi\ge 0$ и $\zeta\ge 0$. 

Простейшие случаи:

1) точка общего положения (все производные отличны от нуля, $p=1$ и $q=2$, т.е. случай 1);

2) $p=1$, $q=3$ - (случай 2) перегиб;

3) $p=2$, $q=3$ - (случай 3) полукубическая парабола $\{x=t^3, y=t^2\}$ ($y=\sqrt[3]{x^2}$).

§14 Бесконечные ветви кривых

Определение. Пусть $t_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$. Говорят, что кривая $f:I\to R^2$ образует бесконечную ветвь при $t\to t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}|f(t)|=\infty$. Говорят, что прямая 1 представляет асимптотическое направление для этой ветви, если существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)}{|f(t)|}$ и образует вектор параллельной прямой 1.

Пусть l_t - прямая, проходящая через $(x(t),y(t))$, представляет асимптотическое направление для ветви $t\to t_0$. Если l_t стремится к ∞ при $t\to t_0$, то говорят, что ветвь параболическая, если $\lim\limits_{t\to t_0}l_t=1$, то говорят, что 1 - асимптотическая ветвь.

Пример.

1) $f(t)=\{tg(t),tg^2(t)\}$, $t_0=\frac{\pi}{2}$. Тогда $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}|f(t)|=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{tg^2(t)+tg^4(t)}=\infty$, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)}{|f(t)|}=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{tg^2(t)}{\sqrt{tg^2(t)+tg^4(t)}},\frac{tg^4(t)}{\sqrt{tg^2(t)+tg^4(t)}}\right\}=\{0,1\}$ - вектор асимптотического направления при $t\to\frac{\pi}{2}$. $l_t=\{(x,y)\in R^2\,|\,x=tg(t)\}$, то $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}l_t=\infty$ - то есть это параболическая ветвь.

2) $f(t)=\left\{\frac{1}{\cos(x)},tg(x)\right\}$, $t_0=\frac{\pi}{2}$. То $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}|f(t)|=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}+tg^2(t)}=\infty$, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)}{|f(t)|}=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\frac{1}{\cos(t)}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}+tg^2(t)}},\frac{tg^2(t)}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}+tg^2(t)}}\right\}=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(t)}},\frac{\sin(t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ - вектор асимптотического направления. $l_t=\left\{\left(\frac{1}{\cos(t)}+r,tg(t)+r\right)\in R^2\,|\,t\in R\right\}=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,y-x=tg(t)-\frac{1}{\cos(t)}=\frac{\sin(t)-1}{\cos(t)}\right\}$, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}l_t=\left\{(x,y)\in R^2\,\middle|\,y-x=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(t)}{\cos(t)}=0\right\}$. То есть $1=\{(x,y)\in R^2\,|\,x=y\}$ - асимптота.

Следующая теорема обобщает эти примеры.

Теорема 14.1. Пусть кривая $f(t)=\{x(t),y(t)\}$ и $\lim\limits_{t\to t_0}|f(t)|=\infty$. Тогда, если $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{x(t)}{y(t)}=0$, то $1=\{(x,y)\in R^2\,|\,x=0\}$ представляет асимптотическое направление. В этом случае а) если $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=\infty$, то это параболическая ветвь, б) если $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=x_0\in R$, то $\tilde{1}=\{(x,y)\in R^2\,|\,x=x_0\}$ является асимптотой.

Доказательство. $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)}{|f(t)|}=\lim\limits_{t\to t_0}\left\{\dfrac{x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}},\dfrac{y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\right\}=\lim\limits_{t\to t_0}\left\{\dfrac{\frac{x(t)}{y(t)}}{\sqrt{\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)^2+1}},\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{x(t)}{y(t)}\right)^2+1}}\right\}=\{0,1\}$. То есть 1 - асимптотическое направление, и $l_t=\{(x,y)\in R^2|x=x(t)\}$. Отсюда сразу следует утверждения а) и б). ∝

Задача 14.1. Сформулировать и доказать аналогичную теорему для случая $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{x(t)}{y(t)}=\infty$.

Теорема 14.2. Пусть кривая $f(t)=\{x(t),y(t)\}$ и $\lim\limits_{t\to t_0}|f(t)|=\infty$. Тогда, если $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=m\in R\setminus\{0\}$, то $l=\{(x,y)\in R^2|x=m\cdot y\}$ представляет асимптотическое направление. В этом случае, если $\lim\limits_{t\to t_0}(y(t)-m\cdot x(t))=\infty$, то это параболическая ветвь, а если $\lim\limits_{t\to t_0}(y(t)-m\cdot x(t))=p\in R$, то $\tilde{l}=\{(x,y)\in R^2|y=m\cdot x+p\}$ - асимптота.

Доказательство. $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)}{|f(t)|}=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\{x(t),y(t)\}}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}=\lim\limits_{t\to t_0}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}},\dfrac{\frac{y(t)}{x(t)}}{\sqrt{1+\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}}\right\}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}},\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right\}$. Следовательно 1 - асимптотическое направление, и $l_t=\{(x,y)\in R^2|y-m\cdot x+(y(t)-m\cdot x(t))\}$. Отсюда следует заключительное утверждение теоремы. ∝

§15 Построение кривых на плоскости

Опишем алгоритм построения кривой $f(t)=\{x(t),y(t)\}$:

1) Найти область определения A кривой f и её компоненты связанности.
2) Найти точки, где $x'(t_0)=0$ или $y'(t_0)=0$ и точки, где $f''(x_0)=\lambda f'(x_0)$.
3) Исследовать форму кривой в окрестностях этих точек
4) Найти бесконечные ветви, их асимптотическое направление. Выделить параболические ветви и найти асимптоты (§13).
5) Построить кривую.

Пример. $f(t)=\left\{t+\dfrac{1}{t},t+\dfrac{1}{2t^2}\right\}$

1) $A=R\setminus 0=R_+\cup R_-$, где $R_+=\{t\in R|t>0\}$, $R_-=\{t\in R|t<0\}$

2) $x'=1-\dfrac{1}{t^2}$, $y'=1-\dfrac{1}{t^3}$. Если $x'(t_0)=0$, то $t_0=\pm 1$. Если $y'(t_0)=0$, то $t_0=1$. $f'(t)=\left\{1-\dfrac{1}{t^2},1-\dfrac{1}{t^3}\right\}$, $f''(t)=\left\{\dfrac{2}{t^3},\dfrac{3}{t^4}\right\}$, $f'''(t)=\left\{-\dfrac{6}{t^4},-\dfrac{12}{t^5}\right\}$. Если $f''(x_0)=\lambda\cdot f'(x_0)$, то $\left\{\dfrac{2}{t^3},\dfrac{3}{t^4}\right\}=\lambda\cdot\left\{1-\dfrac{1}{t^2},1-\dfrac{1}{t^3}\right\}$.

$$\begin{cases}\dfrac{2}{t^3}=\lambda\dfrac{t^2-1}{t^2}\\ \dfrac{3}{t^4}=\lambda\dfrac{t^3-1}{t^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{3}t=\dfrac{t^2-1}{t^3-1}t\\ 2(t^2+t+1)=3(t+1)\Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}\\ 2t^2-t-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}t_1=1\\ t_2=-\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

a) Если $t_0=1$, то $f(1)=\left\{2,\dfrac{3}{2}\right\}$, $f'(1)=0$, $f''(1)=\{2,3\}$, $f'''(1)=-\{6,12\}$. Имеем

$f(1+h)=\left\{2,\dfrac{3}{2}\right\}+\{2,3\}\cdot\dfrac{h^2}{2}-\{6,12\}\cdot\dfrac{h^3}{6}+\{o(1),o(1)\}\cdot h^3$. Это - точка типа 3.

b) Если $t_0=-1$, то $f(-1)=\left\{-2,-\dfrac{1}{2}\right\}$, $f'(-1)=\{0,2\}$, $f''(-1)=\{-2,3\}$. Имеем

$f(-1+h)=-\left\{2,\dfrac{1}{2}\right\}+\{0,2\}\cdot h+\{-2,3\}\cdot\dfrac{h^2}{2}+\{o(1),o(1)\}\cdot h^2$. Это - точка типа 1.

c) Если $t_0=-\dfrac{1}{2}$, то $f(-\frac{1}{2})=\left\{-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right\}$, $f'(-\frac{1}{2})=\{-3,9\}$, $f''(-\frac{1}{2})=\{-16,3\cdot 16\}$, $f'''(-\frac{1}{2})=\{-6\cdot 16,12\cdot 32\}$.Имеем

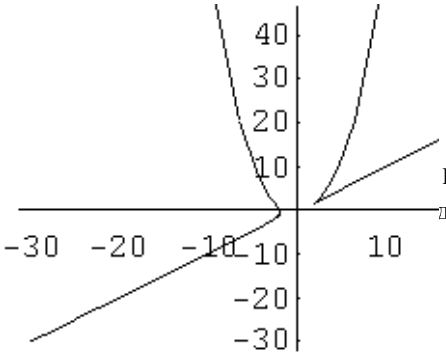
$f(-\frac{1}{2}+h)=\left\{-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right\}+3\cdot\{-1,3\}\cdot h+16\cdot\{-1,3\}\cdot\dfrac{h^2}{2}+\{-16,64\}\cdot h^3+\{o(1),o(1)\}\cdot h^3$. Это — точка типа 2.

3) $\lim\limits_{t\to t_0}|f(t)|^2=\lim\limits_{t\to t_0}\left(t^2+2+\dfrac{1}{t^2}+t^2+t+\dfrac{1}{4t^4}\right)$. Этот предел равен ∞, если и только если $t_0=0$ или $t_0=\infty$.

a) Если $t_0 = 0$, то $\lim_{t\to 0}\frac{x(t)}{y(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t+\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{2t^2}} = 0$ и $\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to 0}\left(t+\frac{1}{t}\right) = \infty$. Согласно теореме 14.1 - это параболическая ветвь с асимптотическим направлением $l_1 = \{(x,y)\in R^2 | x = 0\}$

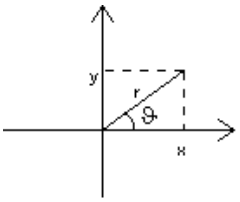
b)

Если $t_0 = \pm\infty$, то $\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t+\frac{1}{2t}}{t+\frac{1}{t^2}} = 1$ и $\lim_{t\to 0}(y(t)-x(t)) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{t}\right) = 0$. Согласно теореме 14.2 - это ветвь имеет асимптоту $l_2 = \{(x,y)\in R^2 | x = y\}$.



§16 Полярные координаты

Обычные координаты (x,y) на плоскости $R^2 = (x,y)$ называются декартовыми. Можно рассматривать и другие координаты. Особенно полезны полярные (r,φ).



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$r,\varphi\in R$

Задача 16.1. Доказать, что полярные координаты (r_1,φ_1) и (r_2,φ_2) обозначают одну и туже точку, если и только если, $r_2 = \delta\cdot r_1$, $\varphi_1 = \varphi_2 + i\cdot\pi$, где $\delta = \pm 1$, $i = 2\cdot n\cdot\pi + \left(\frac{1-\delta}{2}\right)\cdot\pi$.

Пример. Прямая $a\cdot x + b\cdot y = c$ в полярных координатах имеет вид $a\cdot r\cos(\varphi) + b\cdot r\cdot\sin(\varphi) = c$.

Задача 16.2. Описать в полярных координатах параболу $P = \{(x,y)_d \in \Re^2 | y^2 = 1-2x\}$

Параметризованная кривая $f(t) = \{x(t), y(t)\}_d$ в полярных координатах имеет вид $f(t) = (r(t),\varphi(t))_p$, где $x(t) = r(t)\cdot\cos\varphi(t)$ и $y(t) = r(t)\cdot\sin\varphi(t)$. Для её описания удобно использовать вектор-функцию $u(s) = (\cos(s),\sin(s))_d = (1,s)_p$. Тогда $f(t) = r(t)\cdot u(\varphi(t))$.

Параметрические кривые вида $f(t) = (r(t),t)_p = r(t)\cdot u(t)$ называют кривой в полярных координатах.

Задача 16.3. Представить известные вам кривые в виде кривых в полярных координатах.

§17 Положительные ряды

Определение. Ряд - это сумма бесконечного числа слагаемых. $a_1 + a_2 + K = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Слагаемые называются членами ряда. Суммы $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ называются частичными суммами ряда. Если конечный предел $\lim_{n\to\infty} A_n$ существует, то он называется суммой ряда и обозначается также, как сам ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. В этом случае говорят, что ряд сходится. Если конечный предел не существует, то говорят, что ряд расходится. Ряд, где все члены неотрицательны, называется положительным.

Пример. Бесконечной десятичной дроби $c_0, c_1 c_2 K$ соответствует ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i\cdot 10^{-i}$. Тут элементы ряда $c_i\cdot 10^{-i}$. Частичные суммы образуют десятичную последовательность числа. Она сходится к вещественному числу, отвечающему $c_0, c_1 c_2 K$. Если $c_0 \ge 0$, то ряд положительный.

Пример. $\sum_{i=1}^{\infty} q^i$: $A_n = \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$. При $|q|<1$: $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{1}{1-q} = \sum_{i=0}^{\infty} q^i$. При $|q|\ge 1$ расходится.

Задача 17.1. Для всякой числовой последовательности существует ряд, частичные суммы которого образуют эту последовательность. Ряд - это другая запись последовательности, которая материализует идею аппроксимации.

Задача 17.2. Доказать, что ряд $\sum_{i=1}^{n} a_i$ сходится, если и только если $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(m\in N)\ \forall(n>m, l\ge 0)$: $\left|\sum_{i=n}^{n+l} a_i\right| < \varepsilon$. В частности, если ряд сходится, то $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$.

Задача 17.3. Доказать, что если $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то $\forall \lambda \in R \;:\; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \cdot a_i$ тоже сходится и его сумма равна $\lambda \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Если $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ также сходится, то $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ тоже сходится и его сумма равна $\sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

Задача 17.4. Положительный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, если и только если его частичные суммы ограничены, т.е. $\exists (L) \quad \forall (n \in N) \;:\; A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i < L$.

Теорема 17.1. Пусть положительные ряды $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ такие, что при $n > m \;:\; a_n \le b_n$. Говорят, что $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ мажорирует $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Тогда если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, то $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ тоже сходится.

Доказательство. Положим $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Сходимость $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ влечет ограниченность B_n. Отсюда следует ограниченность A_n, что влечет сходимость $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. ∝

Следствие 17.1. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ - положительные ряды такие, что предел $\lim_{i \to \infty} \frac{a_i}{b_i}$ существует (конечен) и отличен от 0. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, если и только если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

Доказательство. Пусть $K = \lim_{i \to \infty} \frac{a_i}{b_i}$. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится. По условию $\forall (\varepsilon > 0) \quad \exists (m \in N) \quad \forall (n > m) \;:\; K - \varepsilon \le \frac{a_n}{b_n} \le K + \varepsilon$, то $a_n \le b_n \cdot (K + \varepsilon)$. Согласно теореме 17.1, отсюда следует сходимость $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Обратное утверждение следует из $\lim_{i \to \infty} \frac{b_i}{a_i} = \frac{1}{K}$. ∝

Следствие 17.2. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ - положительные ряды $(a_i, b_i \ne 0)$ и при $n \ge m \;:\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тогда, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ тоже сходится.

Доказательство. Перемножим почленно неравенства $\frac{a_{N+1}}{a_N} \le \frac{b_{N+1}}{b_N}$, $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \le \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}$, ... , $\frac{a_{N+M+1}}{a_{N+M}} \le \frac{b_{N+M+1}}{b_{N+M}}$. Получим $\frac{a_{N+M+1}}{a_N} \le \frac{b_{N+M+1}}{b_N}$ или $a_{N+M+1} \le \frac{a_N}{b_N} b_{N+M+1}$. Согласно теореме 17.1, отсюда следует сходимость $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. ∝

Теорема 17.2. (Признак Коши) Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ положительный ряд. Тогда 1) если $\exists (q < 1) \quad \exists (m \in N) \quad \forall (n > m) \;:\; \sqrt[n]{a_n} \le q$, то ряд сходится; 2) если $\exists (m \in N) \quad \forall (n > m) \;:\; \sqrt[n]{a_n} \ge 1$, то ряд расходится. В частности, если предел $p = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$ существует, то ряд сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$.

Доказательство. 1) Положим $b_i = q^i$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, если $q < 1$ (пример 2), и $a_n \le b_n$ при $n > m$. Согласно теореме 17.1, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ тоже сходится. Утверждение 2) следует из задачи 17.2. ∝

Теорема 17.3. (Признак Даламбера) Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ положительный ряд. Тогда 1) если $\exists (q < 1) \quad \exists (m \in N) \quad \forall (n > m) \;:\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, то ряд сходится: 2) если $\exists (m \in N) \quad \forall (n > m) \;:\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, то ряд расходится. В частности, если предел $p = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует, то ряд сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$.

Доказательство. 1) Положим $b_i = q^i$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится при $q < 1$ (пример 2) и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ при $n > m$. Согласно следствию 17.2, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ тоже сходится. 2) следует из задачи 17.2. ∝

Теорема 17.4. (Интегральный признак Коши) Пусть $f(x)$ положительная непрерывная монотонно убывающая функция на $[0, +\infty)$ и $a_i = f(i)$. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, если и только если существует (конечный) предел $\lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)dt$.

Доказательство. Пусть $F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^x f(t)\,dt$ и $b_i=F(i+1)-F(i)$. Тогда по теореме о среднем значении (задача 8.2) $b_i=\int\limits_i^{i+1} f(t)\,dt=f(i+\theta)$, где $0<\theta<1$ и $b_i\le a_i$. Аналогично $b_{i-1}=\int\limits_{i-1}^{i} f(t)\,dt=f(i-1+\theta)\ge a_i$. Таким образом, согласно теореме 17.1, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ сходится, если и только если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\lim\limits_{n\to\infty}\bigl(F(i+1)-F(1)\bigr)=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_1^x f(t)\,dt$. ∝

Пример. Положим $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ расходится.

Задача 17.4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n}$ расходится.

§18 Признак Гаусса и гипергеометрический ряд

Теорема 18.1. (Признак Куммера) Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ положительный ряд и c_1,c_2,K последовательность положительных чисел. Тогда 1) если $\exists(\delta>0)\ \exists(m\in N)\ \forall(n>m)$: $c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\ge\delta$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ сходится; 2) если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_i}$ расходится и $\exists(m\in N)\ \forall(n>m)$: $c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\le 0$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ расходится.

Доказательство. 1) Имеем $c_n\cdot a_n-c_{n+1}\cdot a_{n+1}\ge\delta\cdot a_{n+1}>0$ и $0\le c_{n+1}\cdot a_{n+1}<c_n\cdot a_n$. Значит, существует предел $p=\lim\limits_{i\to\infty}c_i\cdot a_i$. Положим $b_i=c_i\cdot a_i-c_{i+1}\cdot a_{i+1}$. Тогда $B_n=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=c_1\cdot a_1-c_{n+1}\cdot a_{n+1}$, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=c_1\cdot a_1-p$. Кроме того, $b_n=c_n\cdot a_n-c_{n+1}\cdot a_{n+1}\ge\delta\cdot a_{n+1}$. Согласно теореме 17.1, отсюда следует сходимость $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$. 2) Имеем $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ge\dfrac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$. Согласно следствию 17.2, расходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_i}$ влечет расходимость ряда. ∝

Следствие 18.1. (Признак Раабе) Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ положительный ряд. Тогда 1) если $\exists(r>1)\ \exists(m\in N)\ \forall(n>m)$: $n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge r$, то ряд сходится, 2) если $\exists(m\in N)\ \forall(n>m)$: $n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Положим $c_n=n$. 1) $c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}=\left(n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}-n\right)-1\ge r-1>0$ и ряд сходится в виду теоремы 18.1. 2) $c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}=\left(n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}-n\right)-1\le 0$ и ряд расходится в виду теоремы 18.1. ∝

Следствие 18.2. (Признак Бертрана) Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ положительный ряд и последовательность $B_n=(\ln n)\cdot\left(n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}-1\right)-1\right)$ имеет конечный или бесконечный предел B. Тогда при $B>1$ ряд сходится, а при $B<1$ расходится.

Доказательство. Положим $c_n=n\cdot\ln n$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ расходится и $c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}=n\cdot\ln n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\cdot\ln(n+1)=(\ln n)\cdot\left[n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=B_n-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right)=\ln e=1$. Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-c_{n+1}\right)=B-1$ и утверждение следует из теоремы 18.1. ∝

Теорема 18.2. (Признак Гаусса) Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ положительный ряд такой, что $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{\theta_n}{n^2}$, где θ_n ограничена. Тогда: 1) Если $\lambda>1$ или $\lambda=1$, $\mu>1$, то ряд сходится. 2) Если $\lambda<1$ или $\lambda=1$, $\mu\le 1$, то ряд расходится.

Доказательство. При $\lambda\ne 1$ - это признак Даламбера (Теорема 17.3). Если $\lambda=1$, но $\mu\ne 1$, то $n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\mu+\dfrac{\theta_n}{n}$, и утверждение следует из признака Рааба (Следствие 18.2). Если $\lambda=\mu=1$, то $(\ln n)\cdot\left(n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}-1\right)-1\right)=\dfrac{\ln n}{n}\cdot\theta_n$. В виду $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n)}{n}=0$ и признака Бертрана ряд расходится. ∝

Определение. Гипергеометрическим рядом Гаусса называется $F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot K\cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot K\cdot(\beta+n-1)}{n!\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot K\cdot(\gamma+n-1)}\cdot x^n$. Будем также считать, что $\alpha,\beta,\gamma,x>0$. Имеем $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+1)\cdot(\beta+n)}{(1+n)\cdot(\gamma+n)}\cdot x=x$. По признаку Даламбера, ряд сходится при $x<1$ и расходится при $x>1$. При $x=1$, используя $\frac{1}{1+\frac{\eta}{n}}=1-\frac{\eta}{n}+\frac{\eta^2}{1+\frac{\eta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}$. Получаем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+n)\cdot(\gamma+n)}{(\alpha+1)\cdot(\beta+n)}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{1+\frac{\eta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta}{1+\frac{\eta}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

где θ_n ограничена. Согласно признаку Гаусса, $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ сходится при $\gamma-\alpha-\beta>0$ и расходится при $\gamma-\alpha-\beta\le 0$.

Функцию $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ можно определить для всех $\alpha,\beta,\gamma,x\in C$, где $\gamma\ne 0,-1,-2,K$ и $|x|<1$.

Задача 18.1. Доказать, что $\omega(x)=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению $z\cdot(1-z)\cdot\omega''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)\cdot z)\cdot\omega'-\alpha\cdot\beta\cdot\omega=0$.

Задача 18.2. Доказать, что $(1+z)^n=F(-n,1,1,-z)$, $\ln(\frac{1+z}{1-z})=2\cdot z\cdot F(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},z^2)$, $\ln(1+z)=z\cdot F(1,-1,2,-z)$, $\arcsin(z)=z\cdot F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z^2)$, $\operatorname{arctg}(z)=z\cdot F(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-z^2)$.

§19 Произвольные Ряды

Определение. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$.

Теорема 19.1. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. $\left|\sum_{i=1}^{n}a_{m+i}\right|\le\sum_{i=1}^{n}|a_{m+i}|$. Согласно задаче 17.2 сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ эквивалентна следующему условию: $\forall(\varepsilon>0)\ \exists(m\in N)\ \forall(n>m)\ \forall(k)\ :\ \left|\sum_{i=1}^{n+m}a_i\right|<\varepsilon$. А выполнение этого условия для $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ влечет его выполнение и для $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$. ∝

Следствие 19.1. Гипергеометрический ряд сходится абсолютно при любых $\alpha,\beta,\gamma,x\in R$, где $\gamma\ne 0,-1,-2,K$, $|x|<1$ и расходиться при $|x|>1$. Если $|x|=1$, то ряд сходиться абсолютно при $(\gamma-\alpha-\beta)>0$ и расходится при $(\gamma-\alpha-\beta)\le 0$.

Доказательство. При $|x|\ne 1$ утверждение следует из признака Д'Аламбера. При $|x|=1$: $x\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$, где $|\theta_n|<n$, и применим признак Гаусса. ∝

Теорема 19.2. Если для $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ верно следующее: $a_i\cdot a_{i+1}<0$, $|a_{i+1}|<|a_i|$ и $\lim_{i\to\infty}a_i=0$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ сходится.

Доказательство. Пусть для определенности $a_1>0$, тогда последовательность $A_{2n}=\sum_{i=1}^{2\cdot n}a_i=(a_1+a_2)+K+(a_{2\cdot n-1}+a_{2\cdot n})>0$ монотонно возрастает и $A_{2n}=a_1+(a_2+a_3)+K+(a_{2\cdot n-2}+a_{2\cdot n-1})+a_{2\cdot n}<a_1$. Следовательно, существует конечный предел $A=\lim_{n\to\infty}A_{2\cdot n}$. Но тогда $A=\lim_{n\to\infty}(A_{2\cdot n}+a_{2\cdot n+1})=\lim_{n\to\infty}A_{2\cdot n+1}$. Отсюда следует, что $A=\lim_{n\to\infty}A_n$. ∝

Пример. При $s\le 1$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ сходится, но не абсолютно.

Определение. Пусть N - множество натуральных чисел. Биекция $\tau:N\to N$ называется перестановкой.

Зафиксируем произвольную перестановку σ. Она переводит ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ в ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_{\sigma(i)}=a_{\sigma(1)}+a_{\sigma(2)}+K$.

Теорема 19.3. Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ абсолютно сходится, тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_{\sigma(i)}$ также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

Доказательство. Пусть $A=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$. Если $a_i\ge 0$, то $A'_n=\sum_{i=1}^{n}a_{\sigma(i)}$ монотонно возрастает и $A'_n\le A$. Следовательно, существует предел $A'=\sum_{i=1}^{\infty}a_{\sigma(i)}\le A$. Ввиду обратимости σ: $A\le A'$, значит $A=A'$. Пусть теперь $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ - произвольный абсолютно сходящийся ряд. По доказанному $\sum_{i=1}^{n}|a_i|=\sum_{i=1}^{n}|a_{\sigma(i)}|$, следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_{\sigma(i)}$ абсолютно сходится. Равенство сумм вытекает из леммы 19.1. ∝

Лемма 19.1. Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ абсолютно сходится, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ составлен из положительных членов ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ - из отрицательных членов. Тогда они оба сходятся и $\sum_{i=1}^{\infty} b_i + \sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Доказательство. Положим $p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ и $q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$, тогда $0 \le p_n, q_n \le |a_n|$, значит ряды $\sum_{i=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{i=1}^{\infty} q_n$ - сходятся, тогда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} (p_i - q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i - \sum_{i=1}^{\infty} q_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i + \sum_{i=1}^{\infty} c_i$. $\propto$

Лемма 19.2 Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ условно сходится. Тогда ряд его положительных (отрицательных) членов расходится.

Доказательство. Пусть ряд положительных членов сходится, тогда ряд отрицательных членов $\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_i| - a_i}{2} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i - \frac{|a_i| + a_i}{2} \right)$ тоже сходится, следовательно, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i| + a_i}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i| - a_i}{2}$ - сходиться - противоречие. $\propto$

Теорема 19.4. (Риман). Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ условно сходится. Тогда $\forall (B \in R)$ существует перестановка σ, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)} = B$.

Доказательство. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ - ряды положительных и отрицательных членов, соответственно. Согласно лемме 19.2 они расходятся. Рассмотрим минимальную конечную сумму такую, что $\sum_{i=1}^{k_1} b_i > B$. Затем минимальную конечную сумму $\sum_{i=1}^{k_2} c_i$ такую, что $\sum_{i=1}^{k_1} b_i + \sum_{i=1}^{k_2} c_i < B$. Затем минимальную сумму следующих членов b_i так, чтобы $\sum_{i=1}^{k_1} b_i + \sum_{i=1}^{k_2} c_i + \sum_{i=k_1+1}^{k_{31}} b_i > B$ и так далее. Ввиду того, что $\lim_{i \to \infty} a_i = 0$, сумма ряда будет B. $\propto$

Задача 19.1. Доказать, что можно переставить члены условно сходящегося ряда так, чтобы его сумма стала равняться $+\infty$ или $-\infty$.

Задача 19.2. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ абсолютно сходятся, тогда $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cdot b_i)$ тоже абсолютно сходится и $\sum_{i=1,j=1}^{\infty} (a_i \cdot b_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)$.

§20 Функциональные ряды

Рассмотрим последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ на L. В §5 мы уже обсуждали, что существует 2 понятия сходимости $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$:

1) Поточечная сходимость, когда условие $\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ выполнено для каждой точки $x_0 \in L$.

2) Равномерная сходимость: $\forall (\varepsilon > 0) \quad \exists (m \in N) \quad \forall (n > m, x \in L) \quad : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Пример. Последовательность $f_n(x) = x^n$ на $[0,1)$. Последовательность $f_n(x)$ равномерно не сходится ни к какой f.
При этом удобнее пользоваться не последовательностями, а рядами.

Определение. Бесконечная сумма функций $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ называется функциональным рядом. $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)$ называются частичными суммами ряда. Говорят, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ поточечно (равномерно) сходится к $a(x)$, если $\lim_{n \to \infty} a_n = a(x)$ поточечно (равномерно).

Теорема 20.1. (Коши) Функциональный ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ равномерно сходится если, и только если $\forall (\varepsilon > 0) \quad \exists (m \in N) \quad \forall (n > m, l \ge 0, x \in L) \quad : \quad \left| \sum_{i=n}^{n+l} a_i(x) \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Если $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ сходится равномерно к $a(x)$, то $\forall (\varepsilon > 0) \quad \exists (m \in N) \quad \forall (n, n' \ge m, x \in L) \quad : \quad \left| \sum_{i=1}^{n} a_i(x) - a(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \sum_{i=1}^{n'} a_i(x) - a(x) \right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда $\left| \sum_{i=n}^{n+m} a_i(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n+m} a_i(x) - \sum_{i=n}^{n} a_i(x) \right| \le \left| \sum_{i=1}^{n+m} a_i(x) - a(x) \right| + \left| \sum_{i=n}^{n} a_i(x) - a(x) \right| < \varepsilon$. Пусть теперь $\forall (\varepsilon > 0) \quad \exists (m \in N) \quad \forall (n > m, l \ge 0, x \in L) \quad : \quad \left| \sum_{i=n}^{n+l} a_i(x) \right| < \varepsilon$. Это означает, что для каждого $x_0 \in L$ последовательность $A_n(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_0)$ удовлетворяет критерию Коши, и, следовательно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ поточечно сходится к некоторой функции $a(x)$.

Докажем, что эта сходимость равномерная. Действительно, из $\left|\sum_{i=1}^{n+m} a_i(x) - \sum_{i=n}^{n} a_i(x)\right| = \left|\sum_{i=n}^{n+m} a_i(x)\right| < \varepsilon$ следует, что $\forall(n > m, x \in L) \;:\; \left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - a(x)\right| = \lim_{l\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n+l} a_i(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\right| \le \varepsilon$. ∝

Следствие 20.1. Пусть $|a_i(x)| \le c_i(x)$ на L и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(x)$ равномерно сходится на L, тогда и $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ равномерно сходится на L.

Доказательство. $\forall(\varepsilon > 0) \;\; \exists(m \in N) \;\; \forall(n > m, x \in L) \;:\; \left|\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\right| < \varepsilon$ и следовательно $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i(x)| \le \sum_{i=1}^{n} c_i(x) < \varepsilon$. Отсюда по теореме 20.1 следует равномерная сходимость $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$. ∝

Говорят, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(x)$ мажорирует ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$.

Теорема 20.2. Если $a_i(x)$ непрерывны и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ равномерно сходится на L, то $a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ непрерывная на L функция.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in L$. По условию $\exists(n \in N) \;:\; \left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - a(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\exists(\delta > 0) \;\; \forall(|x - x_0| < \delta) \;:\; \left|\sum_{i=1}^{n} a(x) - \sum_{i=1}^{n} a(x_0)\right| < \varepsilon$. Следовательно

$$|a(x) - a(x_0)| = \left|a(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_0) - a(x_0)\right| \le \left|a(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x_0)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x_0) - a(x_0)\right| < \varepsilon \text{ . } \propto$$

Задача 20.1. Пусть ряд положительных непрерывных функций на $[A, B]$ поточечно сходится к непрерывной функции. Тогда он сходится равномерно на $[A, B]$.

Задача 20.2. Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ равномерно сходится на $(A, B]$, где $A \in R$ или $A = -\infty$. Предположим, что $\forall(i \in N) \;\; \exists\left(\lim_{x\to A} a_i(x)\right)$. Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{x\to A} a_i(x)$ сходится и $\lim_{x\to A} \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{x\to A} a_i(x)$.

Теорема 20.3. Пусть ряд непрерывных функций $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ равномерно сходится на $L = [A, B]$. Тогда $\int_A^B \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)\right) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_A^B a_i(x)\, dx\right)$.

Доказательство. Интегрируемость $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ следует из теоремы 20.2. Тогда по теореме 20.1 $\forall(\varepsilon > 0) \;\; \exists(m \in N) \;\; \forall(n > m, x \in L) \;:\; \left|\int_A^B \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)\right) dx - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_A^B a_i(x)\, dx\right)\right| = \left|\int_A^B \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i(x)\right) dx\right| \le \int_A^B \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i(x)\right| dx \le \int_A^B \varepsilon\, dx = \varepsilon \cdot (B - A)$. ∝

Теорема 20.4. Пусть ряд дифференцируемых функций $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ сходится при $x = A$, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i'(x)$ - равномерно сходится на $[A, B]$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)$ равномерно сходится на $[A, B]$ и $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} a_i'(x)$.

Доказательство. Докажем, что при $x_0 \in [A, B]$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x) - a_i(x_0)}{x - x_0}$ равномерно сходится на $[A, B] \setminus \{x_0\}$. Согласно теореме 20.1 $\forall(\varepsilon > 0) \;\; \exists(m \in N) \;\; \forall(n > m, x \in L) \;:\; \left|\sum_{i=1}^{n} a_i'(x)\right| < \varepsilon$. Применяя теорему Лагранжа к $\sum_{i=n}^{n+l} a_i(x)$ находим, что $\left|\sum_{i=n}^{n+l} \frac{a_i(x) - a_i(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\frac{\sum_{i=n}^{n+l} a_i(x) - \sum_{i=n}^{n+l} a_i(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\sum_{i=n}^{n+l} a_i'(c)\right| < \varepsilon$, где $c \in [A, B]$. Согласно теореме 20.1 отсюда следует равномерная сходимость $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x) - a_i(x_0)}{x - x_0}$. Тогда подставляя $x_0 = A$ имеем $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) = (x - A_0) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(x) - a_i(A)}{x - A} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(A)$ также сходится равномерно согласно задаче 20.2. Тогда $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)\right)' = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x_0)}{x - x_0}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lim_{x\to x_0} \frac{a_i(x) - a_i(x_0)}{x - x_0}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i'(x)$. ∝

§21 Степенные ряды и ряды Тейлора

Ряд вида $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x - x_0)^i$ называется степенным. Для простоты обозначений мы будем считать, что $x_0 = 0$, но все результаты легко обобщаются на случай произвольных $x_0 \in R$.

Определение. Пусть $\{a_i\}$ произвольная последовательность. Верхним пределом $\overline{\lim_{i\to\infty}} a_i$ называется наибольший из пределов последовательностей вида $\lim_{n\to\infty} a_{i_n}$.

Задача 21.1. Доказать, что верхний предел (конечный или бесконечный) всегда существует.

Определение. Число $D = \frac{1}{\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|a_i|}}$ называется радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$.

Теорема 21.1. Пусть D - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$, $0 < d < D$. Тогда ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$ равномерно сходится на $L = [-d, d]$ и расходится при $|x| > R$.

Доказательство. 1) Если $D = \infty$, то $\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|a_i|} = 0$, откуда $\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} = 0$ и $\lim_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i \cdot x^i|} = 0$ при всех $x \in R$. Согласно приращению Коши (теорема 17.2) отсюда следует, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot d^i$. Если $x \in L$, то $|a_i \cdot x^i| \le |a_i| \cdot d^i$. Тогда согласно теореме 20.1 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$ равномерно сходится на L. 2) Если $D = 0$, то существует подпоследовательность a_{n_i} такая, что $\lim_{n\to\infty} a_{i_n} = \infty$. Значит при любом $x \ne 0$ ряд расходится. 3) Пусть $D \in R \setminus \{0\}$. Рассмотрим $0 < \varepsilon < \frac{1}{d} - \frac{1}{D}$. По условию $\exists (m \in N)\ \forall (n > m)$: $\sqrt[n]{|a_n|} < d \cdot \left(\frac{1}{D} + \varepsilon\right) < 1$ и согласно приращению Коши (теорема 17.2) ряд $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i \cdot d^i|$ сходится, но при $x \in L$: $|a_i \cdot x^i| \le |a_i| \cdot d^i$ и согласно теореме 20.1 ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$ сходится на L равномерно. Пусть $|x| > D$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{D} - \frac{1}{|x|}$. Тогда существует подпоследовательность $\sqrt[i_n]{|a_{i_n}|} > \frac{1}{D} - \varepsilon$ и для нее $\sqrt[i_n]{|a_{i_n} \cdot x^{n_i}|} > |x| \cdot \left(\frac{1}{D} - \varepsilon\right) > 1$ откуда $|a_{i_n} \cdot x^{i_n}| > 1$. ∝

Следствие 21.1. Пусть D - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$. Тогда его сумма $a(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией на $(-D, D)$, $a'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i \cdot x^{(i-1)}$ и при $0 < d < D$ $\int_0^d a(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} \cdot d^{(i+1)}$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$ на отрезке $L = [-d, d]$ при $d < D$. Согласно теореме 21.1 ряд $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$ равномерно сходится на L и по теореме 20.4 $a'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i \cdot x^{(i-1)}$. Радиус сходимости этого ряда такой же, как у $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$, и, поэтому, процесс дифференцирования можно продолжать. Равенство $\int_0^d a(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} \cdot d^{(i+1)}$ следует из теоремы 20.3. ∝

Определение. Пусть $f(x)$ - бесконечно дифференцируемая функция на $L = [-D, D]$. Ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot x^n$ называется рядом Тейлора на L.

Следствие 21.2. Ряд Тейлора равномерно сходится на $[-d, d]$, где $0 < d < \frac{1}{\overline{\lim_{i\to\infty}} \sqrt[i]{\frac{f^{(i)}}{1!}}}$.

Задача 21.2. Всегда ли ряд Тейлора функции f сходится к функции f ?

Задача 21.3. Пусть $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$, $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^i$ и радиус сходимости рядов равен ∞. Каким степенным рядом представляются функции $a(x) \pm b(x)$, $a(x) \cdot b(x)$ и $a(b(x))$.