# Экзамен по математическому анализу, 1 курс, осень 1997

*С. М. Натанзон, С. В. Дужин, С. В. Чмутов*

1. Сформулировать и доказать интегральный признак Коши сходимости рядов.

2. Оценить точность приближения определенного интеграла по формуле *срединных прямоугольников*. Точнее говоря, пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ длины $c=b-a$ и $M$ — максимум модуля $f''(x)$ на этом отрезке. Разобъем отрезок на $n$ равных частей и обозначим $x_i$ середину $i$-й части. Доказать, что
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=1}^n f(x_i)\frac{c}{n}\right|\le\frac{Mc^3}{24n^2}\,.$$

3. Сосчитать предел
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{n^{4/3}}\right).$$

4. Найти предел и скорость стремления к пределу последовательности $x_n$, определенной правилами $x_0=5$, $x_{n+1}=x_n-\sin^4 x_n$. Точнее говоря, найти такие константы $a$, $b$, $c$, что $c<0$ и $x_n-a\sim bn^c$ при $n\to\infty$.

5. Найти неопределенный интеграл
$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{-1+3x-x^2}}.$$

6. Вычислить определенный интеграл
$$\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos x}{(5+3\cos x)^2}\,dx.$$

7. Построить кривую $x=2t-4t^3$, $y=t^2-3t^4$. Указать число и тип особых точек, ветвей, определить асимптоты и точки перегиба.

8. Подобрать константы $a$, $b$, $c$, $d$ таким образом, чтобы выражение
$$\frac{ax+bx^2}{1+cx+dx^2}$$
как можно лучше приближало функцию $\sin x$ в окрестности нуля.

typeset by S. V. Duzhin, `duzhin@botik.ru`