Задачи по математическому анализу, 1 курс, осень 1997

С. В. Дужин (duzhin@botik.ru), *С. В. Чмутов* (chmutov@botik.ru)

Контрольная работа No. 1, 16 сентября 1997

1. $\mathbb{Q}$-*отрезком* называется пересечение отрезка с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Верно ли, что любое семейство вложенных $\mathbb{Q}$-отрезков имеет непустое пересечение?
2. Установить взаимно-однозначное соответствие между точками полуинтервала $[0, 1)$ и отрезка $[0, 1]$.
3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.
4. Функция $f(x)$ задана формулой
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \ . \end{cases}$$
Верно ли, что ее сотая производная $f^{(100)}(x)$ непрерывна в точке 0?
5. Последовательность x_n определена правилом
$$x_1 = \sin 1, \quad x_n = \sin x_{n-1} \quad \text{для } n > 1 \ .$$
Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} x_n$.

Домашнее задание No. 1, 16 сентября 1997

1. Установите взаимно-однозначное соответствие между множествами всех иррациональных и всех вещественных чисел.
2. Пусть D — бесконечное подмножество множества E, причем дополнение $E \setminus D$ не более чем счетно. Установите взаимно-однозначное соответствие между E и D.
3. Существует ли непрерывное отображение
   (a) интервала $(0, 1)$,
   (b) отрезка $[0, 1]$,
   (c) полуинтервала $[0, 1)$

   на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$?
4. Докажите, что любая непрерывная вещественная функция на окружности принимает одинаковые значения в какой-то паре диаметрально противоположных точек.
5. Сосчитайте пределы:
   (a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2})$,
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\operatorname{ch} x}{x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\sin x}{\arcsin\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg}\arcsin x}$.

6. Последовательность x_n состоит из неотрицательных чисел и для любых m и n выполнено неравенство $x_{m+n}\le x_m+x_n$. Докажите, что последовательность x_n/n имеет предел.

7. Нарисуйте кривую, заданную уравнением $\lim\limits_{n\to\infty}(x^{2n}+y^{2n})=1$.

8. Пусть A, B, C — точки на графике функции $y=\cos x$ с абсциссами $x=-\varepsilon,0,\varepsilon$. Обозначим через $M(\varepsilon)$ центр окружности, проходящей через эти точки. Найдите $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}M_\varepsilon$.

9. Последовательность A_n точек плоскости строится по такому правилу. Точка A_0 совпадает с началом координат $(0,0)$. Точка A_1 имеет координаты $(1,0)$. Для любого $n>1$ вектор $\overline{A_nA_{n+1}}$ получается из вектора $\overline{A_{n-1}A_n}$ поворотом на 90° против часовой стрелки и умножением длины на π/n. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

Домашнее задание No. 2, 23 сентября 1997

1. Доказать правило Лопиталя для последовательностей: если x_n, $y_n\to 0$ и существует предел $(y_n-y_{n+1})/(x_n-x_{n+1})$, равный a, то существует и предел y_n/x_n, тоже равный a. [В формулировке имеется ошибка, см. следующее задание.]

2. Последовательность x_n строится по правилу: $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n-ax_n^k$, где $a>0$ — вещественное число, а $k>1$ — целое. Найти асимптотику этой последовательности. Более точно, доказать, что при n, стремящемся к бесконечности, x_n эквивалентно последовательности вида cn^α и выразить константы c и α через c и k.

3. Доказать, что последовательность $1+1/2+1/3+\ldots+1/n-\ln(n)$ имеет предел.

4. На край стола кладут стопку кирпичей длины 1, из которых каждый следующий может быть смещен относительно предыдущего, но так, чтобы вся стопка держалась. На какое наибольшее расстояние может удалиться по горизонтали от края стола самый верхний кирпич?

Домашнее задание No. 3, 30 сентября 1997

1. Придумать контрпример к немонотонному правилу Лопиталя, т.е. такие две бесконечно малые последовательности x_n, y_n, что последовательность $(y_n-y_{n+1})/(x_n-x_{n+1})$ имеет предел, а последовательность y_n/x_n расходится.

2. Сформулировать и доказать правило Лопиталя для бесконечно больших последовательностей.

3. *Задачи из лекций.*
Заданы были все, но реально обсуждались в классе следующие две:
a. Отображение $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ обладает таким свойством: образ любого отрезка является отрезком. Верно ли, что f непрерывно?
b. Вывести из принципа Больцано-Вейерштрасса существование точной верхней грани у любого ограниченного сверху множества.

4. Исследовать на равномерную сходимость (т.е. определить, на каких отрезках оси x она имеет место) следующие последовательности:
a. $f_n(x) = x^n$,
b. $f_n(x) = x/(1+nx^2)$,
c. $f_n(x) = nx/(1+n^2x^2)$.

Домашнее задание No. 4, 7 октября 1997

1. Исследовать на равномерную сходимость (т.е. определить, на каких отрезках оси x она имеет место) следующие последовательности:
a. $f_n(x) = \sin(n^2x)/x$,
b. $f_n(x) = 1/(1+x^{2n})$,
c. $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$.

2. Функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой, причем $f'(a) > 0$. Вытекает ли отсюда, что функция $f(x)$ монотонно возрастает в некоторой окрестности точки a?

Классная работа No. 5, 14 октября 1997

1. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$ для некоторых точек $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Доказать, что $f^{(n)}(\xi) = 0$ для некоторой точки $\xi \in (x_0, x_n)$.

2. Доказать, что если все корни многочлена P степени n вещественны, то и все корни многочлена P' тоже вещественны.

3. Доказать, что у *многочлена Лежандра*
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$$
все корни вещественны и принадлежат интервалу $(-1, 1)$.

4. Найти ошибку в следующем доказательстве непрерывности производной $f'(x)$.

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. По теореме Лагранжа найдется такая точка ξ между x и x_0, что $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(\xi) = \lim\limits_{\xi\to x_0} f'(\xi)$, что означает непрерывность $f'(x)$ в точке x_0.

5. Доказать тождество
$$2\operatorname{arctg}(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi\operatorname{sgn}(x)$$
при $|x| \geq 1$.

6. Найти все решения уравнения $y' = y$.

7. Найти $(f\circ g)'$, $(f\circ g)^{(2)}$, $(f\circ g)^{(3)}$, $(f\circ g)^{(4)}$.

Домашнее задание No. 5, 14 октября 1997

1. Формула для n-й производной композиции функций f и g имеет вид
$$(f\circ g)^{(n)} = \sum_{D\in A_n}\lambda_D f^{(r(D))}\cdot\prod_{i=1}^{r(D)} g^{(l_i(D))}\ ,$$

где: A_n — множество диаграмм Юнга из n клеточек;
$r(D)$ — число строк диаграммы D;
$l_i(D)$ — длина i-й строки диаграммы D.

Найти формулу для коэффициента λ_D как функции на множестве диаграмм Юнга.

2. Доказать, что кривизна кривой $y = f(x)$ задается формулой
$$k = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}.$$

3. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и для каждой точки x существует такое натуральное число n_x, что $f^{(n_x)} = 0$. Доказать, что f — полином.

Занятие No. 6, 21 октября 1997

Найти интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$,
2. $\displaystyle\int (\frac{\ln x}{x})^2\,dx$,
3. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$,
4. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$,
5. $\displaystyle\int \frac{sinxcosx}{sinx+cosx}\,dx$,
6. При каких a, b, c
$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$$
является рациональной функцией?
7. Доказать, что $\int xf''(x)dx = xf' - x$.
8. Найти функцию $f(x)$ из условия, что $f'(x^2) = 1/x$ при $x > 0$.
9. Найти функцию $f(x)$ из условия, что $f'(sin^2 x) = cos^2 x$ при $x > 0$.
10. Функция $f(x)$ монотонна и непрерывна, $F(x)$ — ее первообразная, $f^{-1}(x)$ — обратная функция. Доказать, что
$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

Контрольная работа No. 2, 28 октября 1997

1. Найти неопределенные интегралы:

(a)
$$\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

(b)
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$
(c)
$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$
(d)
$$\int \sqrt{1-e^{-2x}}\,dx.$$
(e)
$$\int e^{\arcsin x}\,dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы:

(a)
$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}\,dx.$$
(b)
$$\int_{-1}^{1} x^3 e^{-x^4} \cos 2x\,dx.$$
(c)
$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{x} \sin\big(x - \frac{1}{x}\big)\,dx.$$

3. Найти пределы:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\big).$$
(b)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!/n^n}.$$

Занятие No. 8, 4 ноября 1997

1. Разбор задач контрольной работы No. 2:
   (a) $\int \sqrt{1-x^2}$, рациональная параметризация кривых второго порядка, подстановки Эйлера.
   (b) $\lim(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n})$.
   (c) $\lim \sqrt[n]{n!/n^n}$.
2. Взять интеграл $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2 4x+3}}$.
3. Доказать оценку погрешности в формуле прямоугольников
$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{b-a}{n} i) \frac{b-a}{n} \right| \le M_1 \frac{(b-a)^2}{2n},$$
где M_1 — максимум модуля $f'(x)$ на данном отрезке.

Домашнее задание

В задачах 1–2 рекомендуется использовать подстановку, которая получается из рациональной параметризации кривой второго порядка, заданной уравнением $y^2 = f(x)$, где $f(x)$ — выражение под знаком корня. Задачи 3 и 4 можно решить с использованием формулы Лагранжа о промежуточном значении. Задачу 5 — сведением к определению интеграла как предела интегральных сумм.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.
3. Доказать оценку погрешности в формуле трапеций:
$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b h_n(x)dx\right| \leq M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$
где M_2 — максимум модуля $f''(x)$ на данном отрезке.
4. Вывести формулу Симпсона и оценить ее погрешность. (Функция заменяется на каждом из отрезков разбиения параболой, проходящей через точки графика, расположенными над концами отрезка и его серединой.)
5. Найти предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$
6. Доказать формулу Стирлинга
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

Занятие No. 9, 11 ноября 1997

Разбор задач на интегрирование квадратичных иррациональностей при помощи рациональной параметризации кривых второго порядка.

Домашнее задание

1. Построить кривую $x = (t+2)^2/(t+1)$, $y = (t-2)^2/(t-1)$.
2. Построить кривую $x = (2t-1)/(t^3(t-1))$, $y = (2t-1)/(t^2(t-1))$.
3. Придумайте пару рациональных функций $x = f(t)$, $y = g(t)$, задающие на плоскости ограниченную кривую без самопересечений и точек перегиба, все особые точки которой являются полукубическими точками возврата, а их число равно а) 1, б) 2, в) 3, г) 4.
4. Всякая ли рационально параметризованная кривая на плоскости удовлетворяет полиномиальному уравнению от двух переменных? Точнее, пусть $f(t)$ и $g(t)$ — две рациональные функции. Правда ли, что найдется многочлен от двух переменных $P(x,y)$, не равный тождественно нулю, такой что $P(f(t), g(t))$ тождественно равно нулю?

В задачах 1 и 2 требуется найти особые точки, ветви кривой, определить их тип, найти число и примерное расположение точек перегиба и нарисовать эскиз кривой.

Занятие No. 10, 18 ноября 1997

1. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$; $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ и L — полином Лагранжа:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(x-x_i)}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(x_i-x_i)}\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)} f(x_i) \ .$$

Доказать, что для каждого x существует $\xi \in \operatorname{conv}\{x, x_1, \ldots, x_n\}$ такая, что

$$f(x) - L(x) = \frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi) \ .$$

2. Вывести из предыдущей задачи следующую оценку погрешности формулы трапеций:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]}{2} \right| \le \frac{M_2}{12}(b-a)h^2 \ ,$$

где: $h = (b-a)/n$;

$x_k = a + hk$ для $k = 0, 1, \ldots, n$;

$M_2 = \sup\limits_{\xi \in [a,b]} |f^{(2)}(\xi)|$.

3. Напоминание рядов Тейлора основных элементарных функций:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!}x^n + \ldots \ ; \\
\sin(x) &= x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \ldots + \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots \ ; \\
\cos(x) &= 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \ldots + \tfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots \ ; \\
\ln(1+x) &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots \ ; \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \ .
\end{aligned}$$

4. Получить разложение $\operatorname{arctg}(x)$ в ряд Тейлора:

$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \ldots$.

5. Разложить в ряд Тейлора следующие функции:
   - а) $1/\cos(x)$;
   - б) $e^{\sin(x)}$;
   - в) $\sqrt{\cos(x)}$;
   - г) $\arcsin(x)$;
   - д) $\sin(\operatorname{tg}(x)) - \operatorname{tg}(\sin(x))$.

   (во всех примерах, кроме последнего, найти по три ненулевых члена разложения; в последнем примере — один).

6. С помощью дифференциального уравнения $(\operatorname{tg}(x))' = (\operatorname{tg}(x))^2 + 1$ получить рекуррентную формулу для коэффициентов Тейлора функции $\operatorname{tg}(x)$.

7. Функция $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x(1-x)h''(x) + (1-2x)h'(x) - (1/4)h(x) = 0$$

и начальным условиям $h(0) = 1$, $h'(0) = 1/4$. Найти разложение $h(x)$ в ряд Тейлора.

Занятие No. 11, 25 ноября 1997

1. Исследовать на сходимость следующие ряды:

   а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$;

   б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$;

   в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^p}$;

   г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^p - (n-1)^p - pn^{p-1}\right)$;

   д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

   е) $\displaystyle\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \ldots$;

   ж) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$.

2. Может ли последовательность ε_n стремиться к нулю настолько медленно, чтобы ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon_n}}$ сходился?