Независимый Московский Университет
Высший Математический Колледж
ПРОГРАММА
курса математического анализа
2-й курс 3-семестр 1997-98 уч. года

М. Э. Казарян, С. К. Ландо, Ю. А. Неретин, И. Парамонова

1. **Кривые в $\mathbb{R}^n$.** *Интеграл по кривой. Замена переменных в интеграле. Поведение интеграла при замене пути интегрирования.*

2. **Многообразия.** *Подмногообразия в $\mathbb{R}^n$. Локальные координаты. Гладкие отображения подмногообразий. Многообразие как класс эквивалентности подмногообразий. Атласы и карты. Функции перехода.*

3. **Векторные поля.** *Касательный вектор как класс эквивалентности кривых, проходящих через данную точку. Касательная плоскость к многообразию в точке. Дифференцирование кольца функций, определяемое векторным полем. Поведение векторных полей при замене координат (полярные координаты).*

4. **Дифференциальные формы на многообразиях.** 1-*формы. Дифференциал функции. Дифференциал формы. Внешнее произведение дифференциальных форм. Форма объема. Теорема де Рама. Ориентация.*

5. **Подмногообразия.** *Ограничения функций, векторных полей и дифференциальных форм на подмногообразия.*

6. **Гладкие отображения многообразий.** *Координатная запись отображения. Касательные отображения. Диффеоморфизмы. Поведение функций, векторных полей и дифференциальных форм при заменах переменных.*

7. **Интегрирование дифференциальных форм.** *Многообразия с краем. Инвариантность интеграла при диффеоморфизме. Формула Стокса. Интегрирование по частям.*

8. **Производная Ли.**

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 10 и 13 сентября 1997 года

Напоминание формул линейной алгебры. Пусть матрица T задает переход от базиса $E = (e_1, \dots, e_n)$ в $\mathbb{R}^n$ к базису $E' == (e'_1, \dots, e'_n)$, $E' = ET$. Тогда столбец координат $X = (x^1, \dots, x^n)^{\mathrm{T}}$ точки $x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n = EX$ в новом базисе принимает вид $X' = T^{-1}X$. При этом строки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ координат линейных форм (элементов двойственного пространства $\mathbb{R}^{n*}$) преобразуются по правилу $\alpha' = \alpha T$.

Определение. Кривые $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ в $\mathbb{R}^n$ *эквивалентны*, если $\rho(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) = o(t)$.

1. Проверьте, что

   а) это действительно отношение эквивалентности;

   б) оно не зависит от системы координат в $\mathbb{R}^n$;

   в) $\gamma(t) \sim \tilde{\gamma}(t) \Leftrightarrow \dot{\gamma}(0) = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$.

   Определение. *Касательным вектором* в точке A называется класс эквивалентных кривых, выходящих из этой точки.

   Пусть задана гладкая замена координат $x = x(x')$. Тогда координаты касательного вектора преобразуются по правилу $\dot{x}' = \dfrac{\partial x'}{\partial x}\dot{x} = T^{-1}\dot{x}$, где $T = \dfrac{\partial x}{\partial x'} = \left(\dfrac{\partial x'}{\partial x}\right)^{-1}$ — матрица Якоби замены.

   Обозначение. $\partial/\partial x^i$ — класс кривой $x^i = x^i_0 + t$; $x^j = x^j_0$, $j \neq i$.

2. Покажите, что касательные вектора в данной точке образуют векторное пространство, а вектора $\partial/\partial x^i$ задают его базис. Найдите матрицу перехода от базиса $\{\partial/\partial x^i\}$ к базису $\{\partial/\partial x'^i\}$.

   Определение. *Дифференциальной 1-формой* называется семейство гладко зависящих от точки пространства линейных форм на касательных векторах.

   Пусть $dx^1, \dots, dx^n$ — базис, двойственный базису $\partial/\partial x'^1, \dots, \partial/\partial x'^n$. Любая 1-форма однозначно записывается в виде $\omega = \sum \omega_i(x) dx^i$, где ω_i — гладкие функции.

   Пример. Пусть F — функция. Дифференциал dF — это форма $dF = \sum \dfrac{\partial F}{\partial x^i} dx^i$. Значение формы dF на касательном векторе, представленном кривой γ, равно производной F вдоль γ.

3. Любая ли 1-форма является дифференциалом? Сформулируйте необходимое условие.

4. Как преобразуются координаты ω_i 1-форм при гладких заменах координат?

   Определение криволинейного интеграла 1-формы ω по кривой γ, параметризованной $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

   $$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \sum \omega_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} dt = \int\limits_a^b (\omega, \dot{\gamma}) dt$$

   (здесь $(\omega, \dot{\gamma})$ — это значение формы ω на касательном векторе $\dot{\gamma}$ кривой).

5. Докажите, что криволинейный интеграл

   а) инвариантен относительно замен координат в $\mathbb{R}^n$;

   б) инвариантен относительно замены параметризации кривой;

   в) $\int_\gamma \omega = -\int_{\overline{\gamma}} \omega$, где $\overline{\gamma}$ — та же кривая, но пройденная в противоположном направлении;

   г) формула «Стокса-Ньютона-Лейбница»: $\int_\gamma dF = F(B) - F(A)$, где γ — произвольная кривая, соединяющая A и B.

6. Вычислите интеграл $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$, где кривая γ соединяет точки $(0,0)$ и $(1,2)$

   а) по отрезку;

   б) по дуге параболы $y = 2x^2$;

   в) по ломаной $(0,0)$—$(1,0)$—$(1,2)$.

7. Те же вопросы для интеграла $\int_\gamma x\,dy + y\,dx$.

8. Вычислите $\int xy^2\,dy - x^2y\,dx$ по дуге окружности $x^2+y^2=R^2$, $y \geqslant 0$.

9. Вычислите $\int (x-y)\,dx - (x+y)\,dy$ по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

10. Вычислите $\int x^2\,dx + y^3\,dy + \cos z\,dz$ по кривой $\gamma:\ x=t^2+t^3;\ y=\sqrt{t^2+1};\ z=e^{t^2};\ -1\leqslant t\leqslant 1$.

11. Вычислите $\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ по замкнутому контуру, не проходящему через начало координат. (Указание: перепишите подинтегральную форму в полярных координатах.)

12. Пусть в области $U\subset\mathbb{R}^n$ задана 1-форма $\omega=\sum\omega_i dx^i$. Установите, равносильны ли следующие утверждения:

   а) $\int_\gamma \omega$ не зависит от пути, соединяющего две данные точки A и B.

   б) $\oint\omega = 0$ по любому замкнутому контуру.

   в) $\omega = dF$ для некоторой функции $F: U\to\mathbb{R}$.

   г) Форма ω замкнута (1-форма ω называется *замкнутой*, если $\dfrac{\partial\omega_i}{\partial x^j}=\dfrac{\partial\omega_j}{\partial x^i}$ для всех i,j).

   (Ответ: а)⇔б)⇔в)⇒г).)

13. Докажите **Теорему**: *всякая замкнутая 1-форма, заданная в шаре, является дифференциалом некоторой функции.*

   (Решение для случая $n=2$. Пусть $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Положим $F(x,y)=\int\omega$, где интеграл берется по прямолинейному отрезку (tx,ty), $0\leqslant t\leqslant 1$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y};\qquad F(x)=\int_0^1 (xP(tx,ty)+yQ(tx,ty))dt;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^1\!\left(tx\frac{\partial P}{\partial x}+P(tx,ty)+ty\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dt=\int_0^1\!\left(tx\frac{\partial P}{\partial x}+P(tx,ty)+ty\frac{\partial P}{\partial y}\right)dt=\int_0^1\frac{d(tP(tx,ty))}{dt}dt=P(x,y).$$

   Обоснуйте самостоятельно формулу дифференцирования интеграла Римана по параметру.)

   Определение. Пространство M называется *односвязным*, если всякое непрерывное отображение окружности $S^1\to M$ продолжается до непрерывного отображения диска $D^2\to M$, $S^1=\partial D$ (иными словами, если каждую замкнутую петлю в M можно непрерывно «стянуть» в точку).

14. Докажите, что всякая замкнутая 1-форма, заданная в односвязной области, является дифференциалом некоторой функции.

15. Вычислите $\int (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

16. Вычислите $\int e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$ по окружности $x^2+y^2=R^2$.

17. Дайте обоснованное определение работы силы вдоль пути.

18. Найдите работу силы величины $F=kr$, направленной вдоль радиус-вектора по направлению к началу координат, вдоль дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$.

19. Найдите работу силы Ньютона $F=k/r^2$ вдоль произвольного пути, соединяющего две точки в $\mathbb{R}^3$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 20 сентября 1997 года

Определение. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким (под)многообразием* размерности m, если для каждой точки $x^* \in M$ существует ее окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $M \cap U$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases},$$

у которой ранг матрицы частных производных $\left\{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*)\right\}$ максимален (говорят, что M — класса C^k, бесконечно дифференцируемое или аналитическое, если функции f_i имеют соответствующий класс гладкости).

1. Докажите эквивалентность каждого из следующих определений подмногообразия приведенному выше: $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие, если для всякого $x^* \in M$ существует окрестность U такая, что

   а) $M \cap U$ является взаимно однозначным образом при гладком отображении максимального ранга $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, где $V \subset \mathbb{R}^m$ — некоторая область. Такое отображение φ вместе с областями $V \subset \mathbb{R}^m$ и $U \cap M \subset M$ называется *картой*, а произвольная совокупность карт, покрывающих M — *атласом*;

   б) $M \cap U$ однозначно проектируется на одну из m-мерных координатных плоскостей, а оставшиеся $n-m$ координат выражаются через данные как гладкие функции;

   в) существует (криволинейная) система координат в U, в которой $M \cap U$ есть координатная m-мерная плоскость $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$;

   г) $M \cap U$ задается системой уравнений $\{f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$, такой, что ранг матрицы частных производных $\left\{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right\}$ равен ровно $n-m$ в каждой точке $x \in U$ (количество уравнений, вообще говоря, может даже быть бесконечным).

В последующих задачах определите, при каких условиях данные множества являются многообразиями, найдите размерность, определите карты и локальные координаты.

2. Окружность $x^2 + y^2 = R^2$; сфера $\sum x_i^2 = R^2$.

3. Поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = a$.

4. Множество $\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = 0 \\ x + y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$.

5. Образ отрезка $[a, b]$ при отображении $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$.

6. Подмножество $SL(n)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ квадратных матриц, состоящее из матриц с единичным определителем.

7. Множество $O(n)$ ортогональных матриц.

8. Многообразие Штифеля $M_{n,k}$ состоящее из ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 27 сентября 1997 года

Отображение $M \to N$ называется гладким, где $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ — гладкие подмногообразия, если в каждой локальной карте оно задается гладкими функциями. Многообразия M и N называются *диффеоморфными*, если между ними существует биективное отображение, гладкое вместе с обратным.

1. Докажите, что изоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.

   Эти определения приводят к понятию абстрактного многообразия.

   Определение. *Гладким многообразием* называется множество M, представленное в виде объединения $M = \bigcup U_\alpha$, вместе с заданными взаимно однозначными соответствиями $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, где $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — открытые области евклидова пространства. Подмножества U_α называются *картами*, а их совокупность — *атласом*. При этом атлас должен бать *допустимым*, то есть разные карты должны быть согласованы: если $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то отображения $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha^{-1}(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ должны быть диффеоморфизмами областей евклидова пространства.

2. Дайте самостоятельно определение эквивалентных карт, диффеоморфных многообразий, гладких отображений.

   Наличие атласа превращает многообразие в топологическое пространство. Обычно требуется (и мы будем следовать этим соглашениям) выполнение двух дополнительных условий: *сепарабельности* и *отделимости*. На языке карт первое условие означает, что существует атлас, состоящий из не более, чем счетного числа карт. Второе означает, что для любых двух точек найдется допустимый атлас, в котором эти точки принадлежат различным непересекающимся картам.

3. Докажите, что гладкое подмногообразие евклидова пространства является многообразием.

   Верно и обратное: каждое многообразие диффеоморфно некоторому подмногообразию евклидова пространства.

4. Вспомните, какие бывают компактные двумерные многообразия (*все* участники данного занятия оказались с ними знакомыми).

5. Определите структуру гладкого многообразия на следующих множествах. Какова их размерность? Какие из них диффеоморфны?

   а) Сфера S^3.

   б) Проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ (пространство прямых в $\mathbb{R}^4$).

   в) Группа $SO(3)$ вращений трехмерного пространства (ортогональных 3×3 матриц).

   г) Пространство конфигураций твердого тела с одной закрепленной точкой.

   д) Подмножество в $\mathbb{C}^3$, заданное уравнениями $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$; $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2$.

   е) Пространство касательных единичных векторов к единичной сфере.

   ж) Группа $SU(2)$ эрмитовых 2×2 матриц.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 4 октября 1997 года

Касательный вектор к многообразию M в точке $x \in M$ задается, как и для областей евклидова пространства, как класс эквивалентных кривых, выходящих из точки x. Множество касательных векторов образует *касательное пространство* T_xM.

1. Докажите, что T_xM — векторное пространство. Какова его размерность? Докажите, что для всяких локальных координат $x_1, \ldots x_n$ векторы $\partial/\partial x_i$ (касательные к i-й координатной прямой) образуют базис в T_xM.

   Пусть на M задана некоторая функция $f : M \to \mathbb{R}$. *Производной* ξf *вдоль вектора* $\xi \in T_xM$, касательного к кривой γ, выходящей из точки x, называется производная в нуле ограничения f на γ (рассматриваемого как функция одной переменной). В координатах, если $\xi = \sum \xi_i \partial/\partial x_i$, то $\xi f = \sum \xi_i \, \partial f/\partial x_i$.

   Векторным полем v на M называется гладкое соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ касательный вектор $v(x) \in T_xM$ в этой точке. В локальных координатах каждое векторное поле однозначно записывается в виде $v = \sum v_i(x)\partial/\partial x_i$.

   Производная функции вдоль векторного поля вновь является функцией, заданной на всем многообразии. Эта операция линейна и удовлетворяет *правилу Лейбница*: $v(fg) = vf\,g + f\,vg$. Всякая такая операция (т.е. линейная и удовлетворяющая правилу Лейбница) называется *дифференцированием.*

2. Докажите, что обратно, каждое дифференцирование задается производной вдоль некоторого поля.

3. Докажите, что коммутатор $[u, v] = uv - vu$ двух дифференцирований тоже является дифференцированием (в то время, как просто композиции uv и vu дифференцированиями не являются).

   Векторное поле, производная вдоль которого равна коммутатору производных вдоль полей u и v, называется коммутатором полей u и v.

4. Найдите координатное выражение для коммутатора полей $u = \sum u_i \partial/\partial x_i$ и $v = \sum v_i \partial/\partial x_i$. (Ответ: $[u, v] = \sum \left(u_j \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.)

5. Докажите, что операция коммутирования векторных полей линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$ (говорят, что векторные поля образуют алгебру Ли).

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 8 октября 1997 года

Кокасательным вектором называется элемент сопряженного пространства T_x^*M, то есть линейная форма на пространстве касательных векторов в данной точке. Дифференциальной 1-формой называется семейство кокасательных векторов, гладко зависящих от точки многообразия.

Пусть $f : M \to R$ — некоторая гладкая функция. *Дифференциалом* df называется 1-форма, значение которой на поле v равно производной vf вдоль этого поля.

1. Покажите, что $df = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, где dx_i — дифференциалы координатных функций.

   Внешней 2-формой называется билинейная кососимметричная 2-форма на касательном пространстве. Дифференциальной 2-формой называется семейство внешних 2-форм, гладко зависящих от точки многообразия.

2. Докажите, что базис в пространстве внешних 2-форм образован формами ω_{ij}, $i < j$, такими, что $\omega_{ij}(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}) = -\omega_{ij}(\dfrac{\partial}{\partial x_j}, \dfrac{\partial}{\partial x_i}) = 1$, и ω_{ij} обращается в ноль на других парах базисных векторов.

   Внешним умножением 1-форм $\alpha \wedge \beta$ называется 2-форма, определяемая следующим соотношением: $\alpha \wedge \beta(u, v) = \alpha(u)\,\beta(v) - \alpha(v)\,\beta(u)$.

3. Покажите, что $\omega_{ij} = dx_i \wedge dx_j$.

4. Выпишите в координатах преобразования при отображениях: а) 1-форм; б) 2-форм.

5. Верно ли, что всякая 1-форма есть дифференциал функции на а) $\mathbb{R}^1$; б) S^1; в) $\mathbb{R}^2$; г) S^2; д) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

6. Вычислите $df \wedge df$.

7. Положим $\mathcal{F}_G = \left\{e^{-x^2/2} P(x)\right\}$; $\Omega^1_G = \left\{e^{-x^2/2} P(x)\, dx\right\}$, где P — многочлены. Сюръективно ли $d : \mathcal{F}_G \to \Omega^1_G$?

8. Опишите все 2-формы на а) $\mathbb{R}^1$; б) $\mathbb{R}^2$.

9. Запишите в координатах какую-нибудь 2-форму на сфере S^2, которая нигде не равна нулю.

10. Напишите в координатах (θ, ψ) форму площади на торе

$$\begin{cases} x = (a + R\cos\theta)\cos\psi \\ y = (a + R\cos\theta)\sin\psi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$$

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 15 октября 1997 года

Внешней k-формой называется полилинейная кососимметрическая форма от k касательных векторов. *Дифференциальной k-формой* называется семейство внешних k-форм, гладко зависящих от точки многообразия. Пространство дифференциальных k-форм на многообразии M обозначается через $\Omega^k(M)$. По определению, $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$ — пространство гладких функций.

Внешним умножением $\alpha^k \wedge \beta^l$ k-формы α^k и l-формы β^l называется $k+l$-форма

$$\alpha^k \wedge \beta^l(\xi_1, \ldots, \xi_{k+l}) = \sum_{\substack{\sigma_1 < \cdots < \sigma_k \\ \sigma_{k+1} < \cdots < \sigma_{k+l}}} (-1)^\sigma \alpha^k(\xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_k})\, \beta^l(\xi_{\sigma_{k+1}}, \ldots, \xi_{\sigma_{k+l}}) ,$$

где $(-1)^\sigma$ — знак подстановки $(1, \ldots, k+l) \mapsto (\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+l})$.

1. Докажите, что внешнее умножение ассоциативно и (супер)коммутативно,
$$\alpha^k \wedge \beta^l = (-1)^{kl} \beta^l \wedge \alpha^k.$$
2. Для данных 1-форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и векторов $v_1, \ldots, v_k$ вычислите $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k(v_1, \ldots, v_k)$.
3. Докажите, что каждая дифференциальная k-форма в локальных координатах однозначно представляется в виде
$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1, \ldots, i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$
где $a_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ — гладкие функции.
4. Найдите размерность пространства Ω^k_x внешних k-форм в точке $x \in M$.

Пусть задано гладкое отображение $F : M^m \to N^n$. *Касательное отображение* $F_* = DF : T_xM \to T_{F(x)}N$ переводит векторы на M в векторы на N. Однако на векторных полях отображение DF не определено, поскольку F, вообще говоря, не взаимно однозначно. Тем не менее на формах операция взятия *обратного образа*, $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, действующая по правилу $F^*\omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(F_*v_1, \ldots, F_*v_k)$ корректно определена.

5. Докажите, что взятие обратного образа перестановочно с внешним умножением, $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$.
6. Покажите, что $\omega^1 \wedge \omega^1 = 0$. Верно ли, что $\omega^2 \wedge \omega^2 = 0$? Приведите пример ω^2, для которой $\omega^2 \wedge \omega^2 \neq 0$.
7. Найдите ω^2, для которой $(x\, dx + y\, dy + z\, dz) \wedge \omega = (x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz$. Докажите, что при ограничении на единичную сферу ω превращается в форму площади.
8. Пусть $f = x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}$ Найдите ω, для которой $df \wedge \omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.
9. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — линейно независимые 1-формы, и $\alpha \neq 0$ — еще одна 1-форма, такая, что $\alpha \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = 0$. Докажите, что
   а) α есть линейная комбинация форм α_i.
   б) Существует некоторая форма β, для которой $\alpha \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$.
10. Пусть $\alpha \neq 0$ — некоторая 1-форма. Докажите, что $\alpha \wedge \omega = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega = \alpha \wedge \beta$ для некоторого β.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 22 октября 1997 года

Дифференциал $d\omega$ дифференциальной k-формы ω — это дифференциальная $(k+1)$-форма, значение которой на наборе попарно коммутирующих векторных полей (например, базисных $\partial/\partial x_i$), определяется формулой

$$d\omega(v_0,\ldots,v_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i v_i\omega(v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_k);$$

на произвольные наборы векторов $d\omega$ продолжается по линейности.

1. Найдите выражение для $d\omega$ на произвольном наборе векторных полей. (Ответ:

$$d\omega(v_0,...,v_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i v_i\omega(v_0,...,\hat{v}_i,...,v_k)+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant k}(-1)^{i+j}\omega([v_i,v_j],v_0,...,\hat{v}_i,...,\hat{v}_j,...,v_k)\ .)$$

   Последнее выражение для $d\omega$ позволяет проверить корректность определения дифференциала.

2. Вычислите d^2f, где f — функция и $d^2\omega$, где ω — 1-форма.

3. Докажите следующие свойства дифференциала.

   а) Линейность.

   б) Если $f\in\Omega^0=\mathcal{F}$, то df совпадает с обычным дифференциалом функций.

   в) $dd=0$.

   г) $d(\alpha^k\wedge\beta^l)=(d\alpha^k)\wedge\beta^l+(-1)^k\alpha^k\wedge(d\beta^l)$.

   Приведенные свойства полностью определяют дифференциал, и могут рассматриваться как независимое его определение. Именно этими свойствами и пользуются при вычислениях.

4. Найдите выражение для дифференциала в координатах. (Ответ:

$$d\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_k}a_I(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\Big)=\sum_{i_1,\ldots,i_k}da_I\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}=\sum_{l;i_1,\ldots,i_k}\frac{\partial a_I}{\partial x_l}dx_l\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\ .)$$

   Наше определение дифференциала бескоординатное, так что по определению, дифференциал не меняется при заменах координат. Это замечание можно обобщить.

5. Докажите, что взятия дифференциала перестановочно с взятием обратного образа при отображениях, то есть если $F:M^m\to N^n$ — гладкое отображение многообразий, и $\omega\in\Omega^k(N)$, то $dF^*\omega=F^*d\omega\in\Omega^{k+1}(M)$.

   Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega=0$, и *точной*, если $\omega=d\eta$ для некоторой формы η. Точные формы замкнуты ($d^2=0$); обратное, вообще говоря, неверно (приведите пример).

6. Для какого α_n форма $\frac{1}{r^{\alpha_n}}\omega$ замкнута, где $r=\sqrt{\sum x_i^2}$, а $\omega=\sum(-1)^{i+1}x_i dx_1\wedge\ldots\wedge\hat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_n$.

7. Найдите функцию f, для которой $d(f\omega)=0$, где $\omega=\frac{dx}{yz}+\frac{dy}{xz}+\frac{dz}{xy}$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 29 октября 1997 года

Лемма Пуанкаре. *Всякая замкнутая k-форма в $\mathbb{R}^n$ при $k > 0$ является точной.*

Эквивалентная формулировка: всякая замкнутая форма ω на произвольном многообразии M является *локально* точной, то есть для каждой точки $x \in M$ найдется такая форма η, что $\omega = d\eta$ в некоторой окрестности точки x.

Доказательство обобщает соответствующее доказательство для случая 1-форм, данное в листке от 10 и 13 сентября. Рассмотрим отображение $h : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$,

$$(h\omega)_x(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^1 \omega_{tx}(\sum x_i \tfrac{\partial}{\partial x_i}, tv_1, \ldots, tv_{k-1})\, dt\ .$$

Тогда на $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ при $k > 0$ выполняется

$$hd + dh = \mathrm{id},$$

то есть для всякой формы ω (не обязательно замкнутой) $h(d\omega) + dh(\omega) = \omega$. Из этого равенства лемма Пуанкаре мгновенно вытекает. Проверка равенства оставляется в качестве задачи.

1. Пусть $\omega = A\, dx \wedge dy + B\, dy \wedge dz + C\, dz \wedge dx$, где A, B, C — функции ($n = 3$). Вычислите $h(\omega)$.
2. Вычислите $hd + dh$ на
   а) 0-формах (функциях);
   б) точных 1-формах в $\mathbb{R}^n$;
   в) произвольных 1-формах в $\mathbb{R}^3$;
3. Пусть $\omega = c(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$. Докажите, что $h(\omega) = a(x) \sum (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k$. Чему равно $a(x)$?
4. Докажите равенство $hd + dh = \mathrm{id}$ на $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $k > 0$.
5. Определите $h(\omega)$ для $\frac{1}{r^3}(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy)$.
6. Найдите линейные преобразования в $\mathbb{R}^3$, сохраняющие форму $dx_1 \wedge dx_2$.
7. Опишите замкнутые и точные формы
   а) на окружности;
   б) в комплексе $e^{-x^2/2}(P,\ Q\, dx)$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены;
   в) в комплексе $e^{-x^3-x}(P,\ Q\, dx)$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены;
   г) в комплексе $e^{-(x^2+y^2)}(P,\ U\, dx + V\, dy\ , Q\, dx \wedge dy)$, где $P(x, y), \ldots, Q(x, y)$ — многочлены.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 5 ноября 1997 года

Контрольная работа

1. а) Докажите, что интеграл $\oint_\gamma x\,dy - y\,dx$, где γ — окружность радиуса r, не зависит от центра окружности.

   б) Вычислите этот интеграл.

   в) Вычислите интеграл той же формы по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Докажите, что
$$\oint_\gamma e^{x\cos y + z}(y\cos y\,dx + (1 - xy\sin y)\,dy + y\,dz) = 0\ ,$$
где γ — произвольная замкнутая кривая.

3. Где обращается в ноль 3-форма $\omega \wedge d\omega$, где
$$\omega = (x^2 + y^2)dz - x\,dy + y\,dz\ ?$$

4. Выпишите форму $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ в сферических координатах.

5. При каких условиях на векторное поле v результат его подстановки $(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)(v, \cdot)$ является дифференциалом некоторой функции? Найдите эту функцию для поля
$$v = x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\ .$$

n-форма ω в $\mathbb{R}^n$ называется *финитной*, если ее носитель ограничен. Если носитель формы $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ лежит в кубе $I^n = \{0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$, то по определению, ее интеграл — это кратный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x)\,dx_1 \ldots dx_n\,.$$

Для определения интеграла n-формы по произвольному многообразию нужно предполагать, что многообразие а) компактно, и б) ориентировано.

Определение. На многообразии M задана *ориентация*, если на нем зафиксирована нигде не обращающаяся в ноль n-форма. Если M связно, и ω_1, ω_2 — две такие формы, то $\omega_2 = f\omega_1$, где $f \neq 0$. Значит либо $f > 0$ (согласованные ориентации), либо $f < 0$ (противоположные ориентации). Базис $v_1, \ldots, v_n \in T_xM$ в касательном пространстве называется *положительным* (соотв. *отрицательным*), если $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$ (соотв. < 0). Задать ориентацию — дать способ согласованного задания знака базисов во всех касательных пространствах T_xM, $x \in M$.

Пусть $\omega_1 \in \Omega^n(M)$ и пусть носитель ω_1 целиком помещается в некоторой карте $F : U \to M$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда мы можем положить

$$\int_M \omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} F^*\omega_1\,,$$

где форма $F^*\omega_1 \in \Omega^n(U)$ продолжена нулем вне $U \subset \mathbb{R}^n$. Этот интеграл не зависит от карты, если только координатные отображения сохраняют ориентацию (действительно, при заменах координат подинтегральное выражение в кратном интеграле умножается на модуль якобиана замены, так же как и форма $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, поэтому интеграл финитной формы определен инвариантно).

Значит, чтобы определить интеграл $\int_M \omega$ в общем случае, достаточно представить ω в виде $\omega = \sum \omega_i$, где носитель каждой формы ω_i содержится в какой-нибудь карте, а затем воспользоваться аддитивностью интеграла, положив $\int_M \omega = \int_M \sum \omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum \int_M \omega_i$. Это можно сделать при помощи разбиения единицы.

Разбиение единицы — это конечный набор бесконечно гладких функций $f_i : M \to \mathbb{R}$ таких, что 1) носитель каждой функции содержится в какой-нибудь карте, 2) $\sum f_i \equiv 1$. Если $\{f_i\}$ — разбиение единицы, то $\omega = \sum f_i\omega$ — искомое представление.

Построение разбиения единицы. Пусть $x \in M$. Выберем какую-нибудь карту, содержащую x, возьмем функцию «шапочку» ρ_x в этой карте, и продолжим ее вне карты нулем. Тогда носитель ρ_x сосредоточен в карте, и в некоторой окрестности V_x точки x функция ρ_x строго положительна. Выберем из покрытия $\{V_x\}$ конечное подпокрытие $\{V_{x_i}\}$, тогда $f_i = \rho_{x_i} / \sum \rho_{x_i}$ — разбиение единицы.

Имеются два определения *многообразия с краем*. 1) $(M, \partial M)$ — подмножество в $\mathbb{R}^N$, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную либо n-мерному шару, либо полушарию. Край ∂M — множество точек, не имеющих окрестности первого типа. 2) $(M_1, \partial M_1)$ — это пара (M, N), состоящая из n-мерного многообразия M и его $(n-1)$-мерного подмногообразия N, разбивающего M на две связные компоненты M_1 и M_2, из которых одна выделена. Обратим внимание на некоторую двусмысленность традиционной терминологии: многообразие с краем многообразием не является (если только край непуст).

Ориентация многообразия задает *индуцированную* ориентацию на его краю: пусть $x \in \partial M$, и $v_1, \ldots v_n \in T_xM$ — положительный репер для M, причем $v_2, \ldots, v_n \in T_x\partial M$, а v_1 направлен «наружу», тогда $v_2, \ldots, v_n$ — положительный репер для ∂M. В терминах форм старшей степени:

если в локальных координатах край задается уравнением $x_1 = 0$, а самому многообразию соответствует область $x_1 < 0$ (так что вектор $\partial/\partial x_1$ направлен наружу), то форма $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ориентирует M тогда и только тогда, когда форма $dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ориентирует край ∂M.

Теорема (формула Стокса). *Пусть M — компактное многообразие с краем ∂M, и ω — $(n-1)$-форма на M. Тогда*

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{M} d\omega \ .$$

Проверим теорему в квадрате I^2 (невзирая на то, что квадрат многообразием с краем не является). Пусть $\omega = f(x,y)dy$. Тогда $d\omega = \partial f/\partial x \, dx \wedge dy$. По формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_{I^2} d\omega = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x} dx \Big) dy = \int_0^1 (f(1,y) - f(0,y)) dy \ .$$

С другой стороны, форма ω нетривиальна только на сторонах $x = 0$ и $x = 1$ квадрата, поэтому (после учета соответствующих ориентаций)

$$\int_{\partial I^2} \omega = \int_0^1 f(1,y)dy - \int_0^1 f(0,y)dy \ .$$

Те же вычисления проверяют формулу Стокса в произвольном кубе I^n, нужно только y заменить всюду на $y_2, \ldots, y_n$, а dy — на $dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_n$.

В действительности, вычисления для куба дают формулу Стокса в общем случае. Действительно, из аддитивности интеграла следует, что нам достаточно доказать формулу Стокса при условии, что носитель формы ω содержится в образе куба I^n при отображении $F : U \to M$, $I^n \subset U \subset \mathbb{R}^n$, задающем некоторые локальные координаты. Положим $\Omega = F^*\omega$. Тогда $F^* d\omega = d\Omega$.

Рассмотрим два случая: 1) $F(I^n) \cap \partial M = \emptyset$. В этом случае $\int_{\partial M} \omega = 0$, поскольку $\omega = 0$ на ∂M. С другой стороны, по формуле Стокса для куба

$$\int_M d\omega = \int_{I^n} d\Omega = \int_{\partial I^n} \Omega = 0 \ ,$$

поскольку $\omega = 0$ на образе $F(\partial I^n)$ границы куба.

2) $F(I^n) \cap \partial M$ совпадает с гранью $I^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ куба. Тогда $\int_{\partial M} \omega = -\int_{I^{n-1}} \Omega$ (вспомним правило ориентации границы!) С другой стороны, Ω обращается в ноль на всех гранях, кроме I^{n-1}, и опять по формуле Стокса для куба, получаем

$$\int_M d\omega = \int_{I^n} d\Omega = \int_{\partial I^n} \Omega = -\int_{I^{n-1}} \Omega \ .$$

Теорема полностью доказана.

1. Проверьте формулу Стокса для
   а) $\omega = x^2 y^3 \, dx + dy + z \, dz$ на верхней полусфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;
   б) $\omega = y \, dx + z \, dy + x \, dz$ на круге в пересечении шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ с плоскостью $x + z = a$;
   в) $\omega = (z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz$ на винтовой поверхности $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = cv$ ($a \leqslant u \leqslant b$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$).

2. Вычислите интеграл по эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ от формы а) $dx \wedge dy$; б) $z \, dx \wedge dy$; в) $z^2 dx \wedge dy$; г) $\frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z}$.

3. Вычислите интеграл по верхней половине ($z \geqslant 0$) того же эллипсоида от формы а) $x^3 dy \wedge dz$; б) $yz \, dz \wedge dx$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 19 ноября 1997 года

Производная функции вдоль направления не обобщается на дифференциальные формы, поскольку нельзя сравнивать значения формы в различных точках. Оказывается, можно определить *производную* $L_\xi\omega$ *формы* ω *вдоль векторного поля* ξ. Пусть $G_t : M \to M$, $|t| < \varepsilon$, $G_0 = \mathrm{id}$ — гладкое семейство диффеоморфизмов. Оно задает семейство векторных полей $\xi(t)$, значение поля $\xi(t_0)$ в точке $G_{t_0}x \in M$ — касательный вектор к кривой $\{G_t x\}$. Обратно, каждому векторному полю (возможно, зависящему от t) соответствует семейство диффеоморфизмов (это — теорема существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений, верная для компактных, а с некоторыми оговорками, и для произвольных многообразий). Положим $\xi = \xi(0)$. Пусть $\omega \in \Omega^k(M)$. Положим $\omega_t = G_t^*\omega$.

Определение. $L_\xi\omega \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \omega_t = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G_t^*\omega$.

1. Докажите следующие свойства производной L_ξ вдоль векторного поля.

   а) Линейность.

   б) Если $f \in \Omega^0 = \mathcal{F}$, то $L_\xi f = \xi f = df(\xi)$ — обычная производная вдоль векторного поля.

   в) Для произвольных двух форм $L_\xi(\alpha\wedge\beta) = (L_\xi\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(L_\xi\beta)$.

2. Докажите, что если η — другое векторное поле, то $L_\xi\eta = [\xi,\eta]$ (по определению, $L_\xi\eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (G_t^{-1})_*\eta)$.

3. Докажите правило дифференцирования «сложной функции»: если $\omega \in \Omega^k(M)$ и $v_1,\ldots,v_k$ — векторные поля на M, то

$$L_\xi\Big(\omega(v_1,\ldots,v_k)\Big) = (L_\xi\omega)(v_1,\ldots,v_k) + \sum \omega(v_1,\ldots,[\xi,v_i],\ldots,v_k).$$

4. Докажите, что *оператор подстановки* $i_\xi\omega^k(v_1,\ldots,v_{k-1}) \overset{\mathrm{def}}{=} \omega^k(\xi,v_1,\ldots,v_{k-1})$ обладает следующими свойствами

   а) Линейность.

   б) $i_\xi df = \xi f$, если f — функция.

   в) $i_\xi(\alpha^k\wedge\beta^l) = (i_\xi\alpha^k)\wedge\beta^l + (-1)^k\alpha^k\wedge(i_\xi\beta^l)$.

   Операторы $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$, $i_\xi : \Omega^k \to \Omega^{k-1}$ и $L_\xi : \Omega^k \to \Omega^k$ связаны *тождеством Картана*

$$L_\xi = i_\xi d + d i_\xi\ .$$

   Обнаружить это замечательное тождество гораздо труднее, чем доказать

5. Докажите тождество Картана для

   а) функций;

   б) 1-форм вида df;

   в) произвольных форм. (Указание: воспользуйтесь индукцией по степени ω.)

Геометрическое доказательство формулы Стокса $\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$. Предположим, что $M = M_0$ является одной из частей, на которые подмногообразие $N_0 = \partial M_0$ разбивает компактное ориентированное многообразие W. Продолжим ω до гладкой $(n-1)$-формы на всем W. Пусть ориентация на W задана n-формой Ω. Поскольку Ω нигде не обращается в ноль, ω можно представить в виде $\omega = i_V\Omega$, где V — некоторое векторное поле на W, а i_V — оператор подстановки. Пусть $F_t : W \to W$, $|t| < \varepsilon$ — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, задаваемое полем V. Положим $M_t = F_t(M_0)$, $N_t = \partial M_t = F_t(N)$. Посчитаем двумя способами величину $\frac{d}{dt}\int_{M_t}\Omega\,\Big|_{t=0}$, измеряющую скорость изменения объема части M_t многообразия W.

1) По тождеству Картана, $$\frac{d}{dt}\int\limits_{M_t}\Omega\,\Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int\limits_{M_0}F_t^*\Omega\,\Bigg|_{t=0} = \int\limits_{M_0}L_V\Omega = \int\limits_{M_0}d(i_V\Omega) = \int\limits_{M_0}d\omega.$$

2) С другой стороны, $$\frac{d}{dt}\int\limits_{M_t}\Omega\,\Bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\int\limits_{M_t}\Omega - \int\limits_{M_0}\Omega\Big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_{N_{(0,t)}}\Omega,$$

где полоска $N_{(0,t)} = \bigcup_{\tau\in(0,t)}N_\tau$ заметается дугами траекторий поля V, выходящих из N_0. Поэтому (продумайте, почему!)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_{N_{(0,t)}}\Omega = \int\limits_{N_0}i_V\Omega = \int\limits_{\partial M_0}\omega\ .$$

Комментарии к доказательству леммы Пуанкаре. Другим применением формулы Картана является разъяснение доказательства леммы Пуанкаре, приведенного в листке от 29 октября.

Пусть $G_t : M^m \to N^n$, $t\in[0,1]$ — гладкое семейство отображений, не обязательно диффеоморфизмов. Оно задает семейство векторов $\xi_x(t)\in T_{G_t(x)}N$, $x\in M$ — касательных к кривым $\{G_t x\}$, $t\in[0,1]$. Пусть $\omega\in\Omega^k(N)$. Положим $\alpha_t = G_t^*\omega\in\Omega^k(M)$. Тогда аналогично, индукцией по степени ω, доказывается следующее усиление тождества Картана

$$\frac{d}{dt}\alpha_t = \theta_t d + d\theta_t,\quad t\in[0,1],$$

где $\theta_t : \Omega^k(N)\to\Omega^{k-1}(M)$ — «подстановка $\xi(t)$ одновременно со взятием обратного образа», $(\theta_t\omega)_x(v_1,\dots,v_{k-1}) = \omega(\xi_x(t),(G_t)_*v_1,\dots,(G_t)_*v_{k-1})$. Интегрируя по t, получаем равенство

$$\alpha_1 - \alpha_0 = hd\omega + dh\omega,$$

где $h : \Omega^k(N)\to\Omega^{k-1}(M)$, $\omega\mapsto\int_0^1\theta_t dt$. Из этого равенства вытекает **принцип гомотопии**: *обратные образы замкнутой формы при гладко гомотопных отображениях отличаются на точную.* (Два гладких отображения многообразий называются гладко гомотопными, если их можно соединить гладким семейством отображений, зависящим от параметра $t\in[0,1]$.) Например, для гомотопии $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n : x\mapsto tx$ получаем лемму Пуанкаре: в $\mathbb{R}^n$ всякая замкнутая форма положительной степени отличается от нулевой на точную.

6. Покажите, что оператор h для гомотопии $x\mapsto tx$ совпадает с одноименным оператором из доказательства леммы Пуанкаре, приведенного выше.

7. а) Выведите формулу для объема тела, ограниченного поверхностью $r = r(\varphi,\theta)$ и угловым сектором $a_1\leqslant\varphi\leqslant b_1$; $a+2\leqslant\theta\leqslant b_2$.
   б) Вычислите объем тела для $r = a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$.

8. Найдите якобиан перехода к эллиптическим координатам $(x,y,z)\mapsto(t_1,t_2,t_3)$, где t_i — решения уравнения $\frac{x^2}{a^2-t}+\frac{y^2}{b^2-t}+\frac{z^2}{c^2-t}=1$.

9. Если M^n — компактное многообразие без края, то для всякой точной n-формы Ω выполняется $\int_M\Omega = 0$. Верно ли обратное, $\int_M\Omega = 0\Rightarrow\Omega = d\omega$ для некоторой $(n-1)$-формы ω?

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 26 ноября 1997 года

В классическом векторном анализе в трехмерном пространстве функция $f(x,y,z)$ может обозначать как собственно функцию, так и 3-форму $f\,dx\wedge dy\wedge dz$. Аналогично, вектор-столбец $(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ может обозначать не только векторное поле $P\partial/\partial x+Q\partial/\partial y+R\partial/\partial z$, но и 1-форму $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$, или 2-форму $P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$, что очень сильно запутывает существо происходящего. В этих обозначениях дифференциалы в комплексе

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{d}\Omega^1(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{d}\Omega^2(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{d}\Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

называются, соответственно, *градиентом, ротором и дивергенцией.*

1. Найдите координатное выражение для этих операций. (Ответ:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f&=\Big(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\Big)\ ,\\ \operatorname{rot}(P,Q,R)&=\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\ ,\\ \operatorname{div}(P,Q,R)&=\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\ .)\end{aligned}$$

Опишем инвариантно (насколько это возможно) эти соответствия, т.е. выясним, от каких дополнительных структур они зависят. Примерами возможных структур являются *форма объема* — невырожденная дифференциальная форма dV старшей степени (например, $dV=dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ в $\mathbb{R}^n$) и *риманова структура* — гладко зависящее от точки многообразия скалярное произведение в касательных пространствах (например, $\|v\|^2=\sum v_i^2$ в $\mathbb{R}^n$).

Пусть на многообразии M^n задана форма объема $dV=\omega^n$. Она задает взаимно-однозначное соответствие между функциями и n-формами, $f\mapsto f\omega$, что позволяет интегрировать по областям $D\subset M$ функции, $f\mapsto\int_D f\,dV$. При этом $m(D)=\int_D dV$ — «объем» области D.

Кроме того, имеется соответствие между векторными полями и $(n-1)$-формами, $v\mapsto\omega_v^{n-1}=\omega(v,\cdot)$. При этом n-форма $d\omega_v=L_v\omega$ пропорциональна ω, коэффициент пропорциональности называется *дивиргенцией* векторного поля v. Из определения вытекает, что дивиргенция

$$\operatorname{div} v(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_{D_\varepsilon}L_v\omega}{m(D_\varepsilon)}\ ,$$

измеряет скорость увеличения объема частиц в потоке поля v.

Интеграл по $n-1$-мерной поверхности G^{n-1} от формы ω_v называется *потоком* поля v через поверхность G. Если на M задана дополнительно риманова структура (скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$), то на поверхности G индуцируется естественная форма объема $dS=\omega^n(\nu,\cdot)$, где ν — вектор внешней единичной нормали к поверхности G. Тогда $v=(v,\nu)\nu+v_{\text{кас}}$, где вектор $v_{кас}$ касается G. Поэтому $\omega_v\Big|_G=(v,\nu)\,dS$, и поток имеет вид

$$\mathit{\Pi}_G v=\int_G(v,\nu)\,dS,$$

Теорема Стокса (называемая в этом случае теоремой Остроградского) утверждает, что в случае, когда поверхность G ограничивает область D, выполняется равенство

$$\int_G(v,\nu)\,dS=\int_D(\operatorname{div} v)\,dV\ .$$

Наличие римановой структуры позволяет отождествить вектора также и с 1-формами, $v \mapsto \alpha_v^1 = (v, \cdot)$. Кроме того, элемент объема имеется на подмногообразиях всех размерностей, в частности, *элемент длины* на кривой γ — это 1-форма $dl = \alpha_\tau^1$, где τ — единичный касательный вектор кривой. Интеграл

$$Ц_\gamma v = \int_\gamma \alpha_v^1 = \int_\gamma (v, \tau)\, dl$$

называется *циркуляцией* поля v вдоль кривой γ. Если M трехмерно, то $2 = n - 1$, и по определению, $d\alpha_v^1 = \omega_{\mathrm{rot}\, v}$. Теорема Стокса для 1-форм в этом случае принимает такой вид: если область G двумерной поверхности ограничена замкнутой кривой γ, то циркуляция поля v вдоль нее равна потоку ротора поля v через G,

$$Ц_\gamma v = П_G \mathrm{rot}\, v\,, \qquad \oint_\gamma (v, \tau)\, dl = \int_G (\mathrm{rot}\, v, \nu)\, dS\,.$$

2. Найдите координаты поля w, задающего 2-форму $\omega_w^2 = \alpha_u^1 \wedge \alpha_v^1$.

3. Определите функцию f, задающую 3-форму $\alpha_u^1 \wedge w_v^2 = f\, dx \wedge dy \wedge dz$.

Явные формулы векторного анализа в размерностях, больших трех, также находят важные применения. Например, 2-форма в $\mathbb{R}^4$ задается 6 коэффициентами.

4. Найдите выражение для дифференциала 2-формы в $\mathbb{R}^4$.

Примером применения предыдущей задачи являются уравнения Максвелла. Электромагнитное поле в $\mathbb{R}^3$ задается двумя полями $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$. Уравнения распространения электромагнитных волн в вакууме имеют вид

$$\begin{array}{ll} \mathrm{div}\, H = 0, & \mathrm{rot}\, E = -\frac{1}{c}\dot{H} \\ \mathrm{div}\, E = 0, & \mathrm{rot}\, H = \frac{1}{c}\dot{E} \end{array}$$

Из решения предыдущей задачи видно, что эти уравнения можно записать в виде

$$dF = 0, \qquad d(*F) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F &= -E_1 dx_0 \wedge dx_1 - E_2 dx_0 \wedge dx_2 - E_3 dx_0 \wedge dx_3 + H_1 dx_2 \wedge dx_3 + H_2 dx_3 \wedge dx_1 + H_3 dx_1 \wedge dx_2, \\ *F &= H_1 dx_0 \wedge dx_1 + H_2 dx_0 \wedge dx_2 + H_3 dx_0 \wedge dx_3 + E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Здесь $x_0 = ct$, а x_1, x_2, x_3 — координаты точки в $\mathbb{R}^3$. Связь между формами F и $*F$ состоит в следующем. Наличие невырожденного скалярного произведения в касательном пространстве к многообразию M задает скалярное произведение и во всех его внешних степенях, что вместе со спариванием $\Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M) \to \Omega^n(M)$, задаваемым внешним умножением, дает отождествления $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$. При $n = 4$ если $k = 2$, то и $n - k = 2$. Оказывается, что оператор $*$, участвующий в уравнениях Максвелла, соответствует $(1,3)$-метрике Минковского $\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ в четырехмерном пространстве-времени, которая невырождена, хотя и не является знакоопределенной.

Из замкнутости 2-формы F вытекает ее точность, $F = dA$. 1-форма A, определенная с точностью до полного дифференциала, называется векторным потенциалом. Долгое время считалось, что векторный потенциал является математической абстракцией, лишенной физического смысла, и лишь недавно было обнаружено (фаза Берри, квантовый эффект Холла) экспериментальное подтверждение его существования.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 28 ноября 1997 года

Задачи к зачету

1. При каких a поверхность $x^2+y^2+z^3-z=a$ в $\mathbb{R}^3$ является многообразием?
2. Является ли подмножество $n\times n$ матриц, заданных уравнением $J^2=-1$, многообразием? Если да, то какова его размерность?
3. Верно ли, что композиция векторных полей является векторным полем?
4. Пусть каждое из двух векторных полей на многообразии касаются некоторого его подмногообразия. Верно ли, что коммутатор также касается этого подмногообразия?
5. Вычислить якобиан перехода от полярных к эллиптическим координатам.
6. Выразить ограничение на единичную сферу формы $\frac{dx\wedge dy}{z}$ в сферических координатах.
7. Верно ли, что всякая замкнутая форма на трехмерном многообразии локально представляется в виде $df\wedge dg$?
8. Является ли точной 1-форма
$$\left(\tfrac{1}{y^2+z^2}-\tfrac{2xyz}{(x^2+z^2)^2}\right)\,dx+\left(\tfrac{z}{x^2+z^2}-\tfrac{2xy}{(y^2+z^2)^2}\right)\,dy+\left(\tfrac{y}{x^2+z^2}-\tfrac{2xz}{(y^2+z^2)^2}-\tfrac{2yz^2}{(x^2+z^2)^2}\right)\,dz\ ?$$
9. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2=r^2}\frac{x\,dy-y\,dx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$.
10. Ограничение всякой 2-формы ω на поверхность S, заданную $f(x,y,z)=0$ имеет вид $\omega|_S=h\,dS$, где dS — форма площади.
    а) Выразите функцию h через функции g и $df(n)$, где $df\wedge\omega=g\,dx\wedge dy\wedge dz$, а n — единичный вектор нормали к S.
    б) Вычислите $\displaystyle\int\limits_{x^2+y^2+z^2=1}\frac{dx\wedge dy}{z}+\frac{dy\wedge dz}{x}+\frac{dz\wedge dx}{y}$.
11. Найти площадь петли, представляющей часть кривой $x^3+y^3=3axy$.
12. Напишите в угловых координатах форму площади на торе в $\mathbb{R}^3$, имеющем осевую окружность радиуса R и меридианальную радиуса r. Чему равна площадь тора?
13. Найдите объем тела $\begin{cases} x^2+y^2+z^2\leqslant 2\\ z\geqslant x^2+y^2\end{cases}$.
14. Найдите площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, ограниченной цилиндром $x^2+y+2=r^2$ $(z>0)$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 7 декабря 1997 года

Письменный экзамен

1. Пусть γ — замкнутый путь на плоскости, такой, что $\oint_\gamma x^3dy - y^3dx = 0$. Докажите, что кривая γ самопересекающаяся.

2. Найдите длину плоской кривой, заданной уравнением $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}$.

3. Вычислите $\displaystyle\int\limits_{x^2+4xz+5z^2+2y^2=2} \left(\frac{dx\wedge dy}{2x+5z} + \frac{dz\wedge dx}{y}\right)$.

4. Рассмотрим стереографическую проекцию $\pi : S^2 \setminus \{(0,0,2)\} \to \mathbb{R}^2$ сферы $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ на плоскость $z=0$.

   а) Найдите выражение для формы $\pi^*(dx\wedge dy)$ и для векторного поля $\pi_*^{-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ в сферических координатах.

   б) Найдите производную функции $z : S^2 \to \mathbb{R}$ и производную формы $\pi^*(dx\wedge dy)$ вдоль этого поля.

5. Вычислите интеграл $\int z^2 dx\wedge dy\wedge dz$ по полноторию, осевая окружность которого лежит в плоскости Oxy и имеет радиус R, а радиус меридиана равен r.

6. Пусть M^n — многообразие, $\Omega^k(M)$, $k=1,\dots,n$ — пространство дифференциальных k-форм на нем, $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Определим отображение $d_f : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ формулой
$$d_f(\omega) = \alpha\, d\omega + \beta\, df \wedge \omega\ ,$$
где константы $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ фиксированы.

   а) Докажите, что d_f — дифференциал, т.е. $d_f^2\omega = 0$ для всех $\omega \in \Omega^k(M)$, $k=1,\dots,n$.

   б) Опишите все точные и замкнутые формы относительно этого дифференциала для случая $M=\mathbb{R}^2$, $f=(x-1)^2+y^2$, и пространств $\Omega^k_{\mathrm{pol}}(\mathbb{R}^2)$, $k=0,1,2$, дифференциальных k-форм с полиномиальными коэффициентами.

   в) Найдите в этом случае размерность факторпространства замкнутых форм по точным для $k=0,1,2$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 2-й курс 1 марта 1998 года

Письменный экзамен

1. Доказать, что криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma_{AB}} f(x,y)(y\,dx+x\,dy)$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда функция $f(x,y)$ постоянна на связных компонентах гипербол $xy = \mathrm{const}$.

2. Вычислить $\dfrac{d}{dt} \int\limits_{x^2+y^2+x^2 \leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx \wedge dy \wedge dz$.

3. Вычислить $\int\limits_{x^2-2xy+5y^2+z^2-z=0} \left(\dfrac{dz \wedge dx + 3\,dy \wedge dz}{2x+y}\right)$.

4. Вычислить $\int\limits_{G} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx \wedge dy \wedge dz$, где область G ограниченна поверхностью вращения вокруг оси Oz лемнискаты Бернулли $(x^2+z^2)^2 = x^2 - z^2$, $y = 0$.

5. Поле v в точках поверхности S, заданной уравнением $x^2+y^2-z^3=0$, имеет вид $3z^2\partial/\partial x + 2x\partial/\partial z$.

   а) Доказать, что это поле — касательное в точках глдкости S.

   б) Найти дивергенцию образа этого поля при центральной проекции поверхности S на плоскость $z = 1$ с декартовыми координатами x, y.

6. Для единичной окружности с угловой координаатой φ прострранства $\Omega^0_{\cos}$ и $\Omega^1_{\cos}$ образованы 0-формами вида $P(\cos\varphi, \sin\varphi)e^{\cos\varphi}$ и 1-формами вида $Q(\cos\varphi, \sin\varphi)e^{\cos\varphi}\,d\varphi$, где P, Q — произвольные многочлены от двух переменных. Дифференциал $\Omega^0_{\cos} \to \Omega^1_{\cos}$ — обычный. Описать все точные и замкнутые формы, а также факторпространство замкнутых форм по точным.