НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Комплексный Анализ. Семинары.

3-ий семестр, 2-ой курс, 1997/1998 учебный год. Лектор Белошапка В.К.

Кулаков А.Г., Немировский С.Ю.

Семинар 1. *08.09.1997*

$\mathbb{C}$ [Евг] Гл. I, [ВЛА] Гл. I

Задача 1. Проверить, что матрица поворота, соответствующая умножению комплексных чисел на $(a+ib)$, имееет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Задача 2. Докажите, что $\mathbb{C}$

а) поле;
б) квадратичное расширение поля $\mathbb{R}$;
в) алгебраически замкнуто;
г) никаких других нет (это означает, что любое другое алгебраически замкнутое квадратичное расширение поля $\mathbb{R}$ изоморфно $\mathbb{C}$).

Задача 3. Пусть $i^2 = \alpha + i\beta$. Что получится при различных α, β? При каких α, β получатся поля изоморфные $\mathbb{C}$?

Задача 4. Основная теорема алгебры. Доказательства для $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{C}$.

Задача 5. Вывести формулы стереографических проекций для различных расположений единичной сферы.

Задача 6. Какому преобразованию сферы соответствует отображение $z \mapsto \frac{1}{z}$?

Задача 7. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

а) отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – собственное (это означает, что $\forall K$ – компакта $f^{-1}(K)$ – компакт);
б) $|f(z)| \to \infty$ при $|z| \to \infty$.

Задача 8. Докажите, что для любого не тривиального многочлена $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, $n > 0$ выполнено предыдущее свойство.

Задача 9. Геометрическая задача и ее решение с помощью комплексных чисел.

Семинар 2. *15.09.1997*

НЕПРЕРЫВНОСТЬ и ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ.

[Евг] Гл. II, §8,9, [ВЛА] Гл. I

Задача 1. Какова связь между непрерывностью $f(z)$ и непрерывностью

а) $\Re f(z)$ и $\Im f(z)$;
б) $|f(z)|$ и $Arg f(z)$?

Задача 2. Пусть $f(z) = f(x+iy) = f(x,y)$ имеет полный дифференциал в точке $(x_0, y_0) = x_0 + iy_0 = z_0$. Докажите, что

а) либо существует $f'(z_0)$,
б) либо множество частичных пределов $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ при $z \to z_0$ есть окружность с центром в точке $\dfrac{\partial f(z_0)}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ и радиусом $\left|\dfrac{\partial f(z_0)}{\partial \bar z}\right|$, где $\dfrac{\partial f(z_0)}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Задача 3. Пусть $G(x,y) = G(z,\bar z)$ бесконечно дифференцируема и $\dfrac{\partial G}{\partial \bar z}$. Верно ли, что $G = G(z)$, если

а) G – многочлен;
б) в общем случае.

Задача 4. В каких точках существуют производные по комплексному переменному следующих функций:

а) $f_1(z) = |z|^2$;
б) $f_2(z) = |z|$;
в) $f_3(z) = \bar z$;
г) $f_4(z) = \begin{cases} \sin \bar z \cdot Arg(z), z \neq 0; \\ 0, z = 0. \end{cases}$

Задача 5. Что можно сказать о голоморфной функции, отображающей область D в $\mathbb{R}$?

Задача 6. Существует ли функция в $0 \in D \supset \mathbb{C}$, имеющая $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ всюду в D, удовлетворяющая в D условиям Коши-Римана, но не имеющая производной по комплексному переменному в точке $z = 0$?

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

Задача 7. Задача про z^π.

Семинар 3. *22.09.1997*
ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.
[Евг] Гл. VI, §32, 33; [ВЛА] Гл. II

Задача 1. Используя комплексные числа и отображения $z \mapsto az+b$, $z \mapsto \bar{z}$ ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$), докажите теорему Шалля о классификации движений плоскости.

Задача 2. Докажите следующие свойства дробно-линейных отображений:

а) дробно-линейные отображения образуют группу, порожденную аффинными ($z \mapsto az + b$) и $z \mapsto \frac{1}{z}$;
б) дробно-линейные отображения сохраняют окружности в смысле $\bar{\mathbb{C}}$;
в) дробно-линейные отображения сохраняют симметричные (инверсные) точки в смысле $\bar{\mathbb{C}}$;
г) дробно-линейные отображения сохраняют углы (свойство *конформности*).

Задача 3. Докажите, что z_1 и z_2 симметричны (инверсны) в смысле $\bar{\mathbb{C}}$ относительно γ, тогда и только тогда, когда любая окружность в смысле $\bar{\mathbb{C}}$ пересекает γ под прямым углом.

Задача 4. Докажите, что любые две окружности в смысле $\bar{\mathbb{C}}$ можно перевести дробно-линейным отображением

а) либо в концентрические окружности,
б) либо в две параллельные прямые,
в) либо в две пересекающиеся прямые.

Задача 5. Докажите, что при дробно-линейном отображении центры окружностей не сохраняются. Приведите пример.

Задача 6. Докажите, что геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек z_1 и z_2 равно константе, есть окружность в смысле $\bar{\mathbb{C}}$. Все эти окружности называются Аполлониевыми окружностями и ортогональны любой окружности, проходящей через точки z_1 и z_2. Нарисуйте их.

Задача 7. Задача о поризме для окружностей, касающихся двух непересекающихся окружностей.

Задача 8. Докажите, что для любых двух троек различных комплексных чисел z_0, z_1, z_∞ и w_0, w_1, w_∞ существует единственное дробно-линейное отображение, переводящее z_i в w_i. (Указание: рассмотрите сначала случай $w_0 = 0, w_1 = 1, w_\infty = \infty$.)

Задача 9. Нарисуйте образ прямых $\Im z = const$, $\quad \Re z = const$ при дробно-линейном отображении $w = \frac{z+i}{z-i}$.

Задача 10. Нарисуйте образ $\bar{\mathbb{C}}$-окружностей, проходящих через точки i и $-i$, при дробно-линейном отображении $w = \frac{z+i}{z-i}$.

Задача 11. Найти образ множества D при данном отображении:

а) $D = \{\Im z = 1\}, w = \frac{z-1}{z+1}$;
б) $D = \{|z - 0.5i| = 0.25\}, w = -1/z$;
в) $D = \{|z| \geq 1\}, w = 2\frac{2z-1}{z-2}$.

Задача 12. Нарисуйте образ прямых $\Im z = const$, $\quad \Re z = const$ при отображении $w = z^2$.

Задача 13. Нарисуйте образ прямых $\Im z = const$, $\quad \Re z = const$ при отображении $w = \sqrt{z}$.

Задача 14. Нарисуйте образы множеств $arg z = const$ и $|z| = const$ при отображении Жуковского $w = 1/2(z + 1/z)$.

Задача 15. Докажите, что функция Жуковского $z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ есть композиция $z \mapsto z^2$ и дробно-линейных отображений.

Задача 16. Переведите конформно данную область D_1 в область D_2:

а) $D_1 = \{\Re z > 0, \quad |z| < 1\}, \quad D_2 = \{\Im z > 0\}$.
б) $D_1 = \{|z| < 1, \quad |z - i| > \sqrt{2}\}, \quad D_2 = \{|z| < 1$.

Задача 17. Нарисуйте образ прямых $\Im z = const$, $\Re z = const$ при отображении $w = \exp z$.

Задача 18. Докажите, что решения уравнения $\exp(z) = a, a \in \mathbb{C}$ задаются формулой $z = ln(|a|) + iarg(a) + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Задача 19. Докажите, что

а) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;
б) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$;
в) $\sinh z = -i\sin(iz)$;
г) $\tanh(iz) = i\tan z$.

Задача 20. Опишите все точки, в которых функции $\sin z$, $\quad \cos z$, $\quad \cosh z$, $\quad \tanh z$, $\quad \tan z$. принимают а) действительные значения, б) чисто мнимые значения.

Задача 21. Найдите все нули функций $\cos z$, $\quad \sinh z$, $\quad 1/\tanh z$.

Задача 22. Докажите, что все элементарные тригонометрические и гиперболические функции разлагаются в композицию дробно-линейных, $w = z^2$ и экспоненты.

Задача 23. Нарисуйте образ прямых $\Re z = const$, $\Im z = const$ при отображении $w = 1/\tanh z$.

Задача 24. Отобразить $D = \{\Im z > 0\} - [0, ia]$ на $\Im w > 0$. Нарисовать прообразы $\Im w = const$. Какова скорость потока, обтекающего вертикальную пластину высоты a, на высоте h над пластиной, если скорость потока на ∞ равна v_0?

Семинар 4. *25.09.1997, повторение 29.09.1997*
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.
[Евг] Гл. VI, §35, [ВЛА] Гл. II

Задача 1. Найти образы следующих областей при отображении $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$:

а) $\{|z| > 2\}$;
б) $\{|z| < 1/2\}$;
в) $\{\frac{\pi}{4} < arg z < \frac{3\pi}{4}\}$;
г) $\{\frac{\pi}{4} < arg z < \frac{3\pi}{4}\, z \notin [0, i]\}$;
д) $\{|z| < 1\, z \notin [0, 1]\}$;
е) $\{|z| > 1\, z \notin [-2, -1]\,,\ z \notin [1, +\infty]\}$;
ж) $\{\Im z > 0\, z \notin \{|z| = 1,\ 0 < arg z < \frac{\pi}{4},\ \frac{"}{3})"3\pi 4 < arg z < \pi\}\}$;
и) $\{|z| < 1\, \Im z < 0,\ z \notin \left[-i, -\frac{i}{2}\right]\}$;
к) $\{|z| < 1\, 0 < arg z < \frac{\pi}{2}\}$;
л) $\{|z| < 1\, -\frac{3\pi}{4} < arg z < -\frac{\pi}{4}\}$.

Задача 2. Отобразить D на верхнюю полуплоскость

а) $D = \{\Im z > 0\} - \{|z| = 1, \quad 0 < arg z < \alpha < \pi$;
б) $D = \{\Im z > 0, \quad |z| < 1\} - [i, i\beta], \quad \beta < 1$;
в) $D = \mathbb{C} - \{[0, -\alpha i] \cup \{|z| = 1, \quad -\pi < arg z < 0\}$.

Задача 3. Найти образы следующих областей при отображении $w = f(z)$:

а) $\{-\pi < \Im z < 0\}$, $w = e^z$;
б) $\{|\Im z < |\pi\}$, $w = e^z$;
в) $\{|\Im z < |\pi/2\}$, $w = e^z$;
г) $\{0 < \Im z < 2\pi,\ \Re z > 0\}$, $w = e^z$;
д) $\{0 < \Im z < \frac{\pi}{2},\ \Re z > 0\}$, $w = e^{2z}$;
е) $\{0 < \Re z < \pi,\ \Im z > 0\}$, $w = e^{iz}$;
ж) $\{z \notin [0, +\infty]\}$, $w = \ln z$, $w(-1) = -\pi i$;
з) $\{\Im z > 0\}$, $w = \ln z$, $w(i) = \frac{\pi i}{2}$;
и) $\{|\Im z| < \frac{\pi}{4}\}$, $w = thz$;
к) $\{0, \Re z < \frac{\pi}{4}\}$, $w = ctgz$;
л) $\{0 < \Re z < 1, \Im z > 0\}$, $w = tg(\pi z)$.

Задача 4. Найти конформное отображение заданной области на единичный круг

Задача 5. Пусть $f(z)$ – целая функция, и существует система $\gamma_k = \{|z| = R_k\}$, $R_k \to \infty\ k \to \infty$ окружностей такая, что $|f(z)|_{\gamma_k} \leq C \cdot R_k^n$, тогда $f(z)$ – полином.

Задача 6. Придумать пример функции от двух действительных переменных $F(x, y)$, отличной от costant'ы такой, что $|F(x, y) \leq const|$.

Задача 7. Докажите, что если $f(z)$ – целая и $|f(z)| \leq const$, то $f(z) \equiv const$.

Задача 8. Докажите, что если $f(z)$ – целая и $f(\mathbb{C}) \supset H$ (так будет обозначаться верхняя полуплоскось), то $f(z) \equiv const$.

Задача 9. Докажите, что если $f(z)$ – целая и $f(\mathbb{C})$ не содержит множества положительных действительных чисел, то $f(z) \equiv const$.

Задача 10. Докажите, что если $f(z)$ – целая и $f(\mathbb{C})$ не содержит некоторого маленького отрезка или маленькой дуги любого круга, то $f(z) \equiv const$.

Семинар 5. *06.10.1997*
ИНТЕГРИРОВАНИЕ.
[Евг] Гл. II, §10, [ВЛА] Гл. III

Задача 1. Пусть γ – гладкий путь, $f(z)$ – непрерывная в окрестности $\gamma[0, 1]$. Докажите, что

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq |f| \cdot L(\gamma).$$

Задача 2. Пусть $\gamma_i \longrightarrow \gamma$ в $C^1[0,1]$, $f_i(z) \longrightarrow f(z)$ равномерно в окрестности $\gamma[0,1]$. Докажите, что

$$\int_{\gamma_i} f_i(z)dz \longrightarrow \int_{\gamma} f(z)dz,$$

при $i \to \infty$. Приведите пример, когда $\gamma_i \longrightarrow \gamma$ в $C^0[0,1]$ и нет сходмости интегралов.

Задача 3. Докажите, что путь, образ которого изображается углом, тоже гладкий.

Замечание. В определении гладкости нет условия $\gamma(t) \neq 0$.

Задача 4. Существование первообразной вдоль пути для голоморфных функций и формула Лейбница в этом случае.

Определение 1. γ – путь, $F = F(t)$ – первообразная функции $f(z)$ вдоль пути γ, если $\forall t_0 \in [0,1]\, \exists \epsilon > 0, V \supset \gamma(t_0), F_V : V \to \mathbb{C}$ такие, что F_V – первообразная функции $f(z)$ в V и $\forall t : |t - t_0| < \epsilon \quad F_V(\gamma(t)) = F(t)$.

Задача 5. Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $|f| \le M\,|z|^n$, тогда f – полином степени $\le n$.

Задача 6. Докажите, что

$$\int_{|z|=1} z^k dz = \begin{cases} 2\pi i, k = -1 \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Задача 7. Докажите, что теорема единственности не верна для гладких функций, даже, например, в такой формулировке:

$f \equiv 0$ в $V \supset U$, следовательно $f \equiv 0$ в U.

Семинары 6-9. *13.10.1997, 20.10.1997, 27.10.1997, 03.10.1997*
ВЫЧЕТЫ. [Евг] Гл. IV, [ВЛА] Гл. IV

Определение 2.

$$Res_{z=z_0} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\epsilon} f(z)dz, \quad Res_{z=\infty} f(z) := \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z)dz.$$

Задача 1. Докажите, что

(1) $Res_{z=z_0} f(z) := c_{-1}$, где c_k – коэффициент при $(z-z_0)^k$ ряда Лорана разложения функции в окрестности точки z_0;
(2) $Res_{z=\infty} f(z) := -c_{-1}$, где c_{-1} – коэффициент при $\frac{1}{z}$ ряда Лорана разложения функции в окрестности точки ∞;
а) $Res_\infty f(z) = Res_0\{-\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})\}$;
б) $\oint_{\partial D} = \sum_{z_k \in D} Res_{z_k} f(z)$;
в) если $f(z)$ имеет в z_0 полюс первого порядка, то

$$Res_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z).$$

г) если $f(z)$ имеет в z_0 полюс первого порядка и $f(z)"\partial)" = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, $\psi(z_) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

е) если $f(z)$ имеет в z_0 полюс k-ого порядка, то

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \left\{ \frac{d^{(k-1)}}{dz^{(k-1)}} \left[f(z)\,(z - z_0)^k \right] \right\} |_{z=z_0}.$$

Задача 2. Вычислить вычеты заданных функций в заданных точках

а) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, $z_1 = \frac{-\pi}{2}$, $z_2 = \frac{\pi}{2}$;
б) $f(z) = \frac{z}{\sin^3 z}$, $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$;
в) $f(z) = \frac{e^{iaz}(z^2-b^2)}{z(z^2+b^2)}$, $z_1 = 0$, $z_2 = ib$;
г) $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$;
д) $f(z) = (z-1)^2 e^{-\frac{1}{z^2}}$, $z_1 = 0$;
е) $f(z) = z^2 \sin\left(e^{frac1z}\right)$, $z_1 = \infty$;
ж) $f(z) = \frac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z_1 = 1$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ.

Задача 3. Вычислить интеграл $\oint_{\partial D} f(z)dz$:

а) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $D = \{|z-1-i| < 2\}$;
б) $f(z) = z\sin\frac{z+1}{z-1}$, $D = \{|z| < 2\}$;
в) $f(z) = \sin\frac{z}{z+1}$, $D = \{|z| > 3\}$.

Задача 4. **(тип 1)**

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt.$$

Пусть $R(x,y)$ – рациональная функция, определенная при любом значении t, если $x = \cos t$, $y = \sin t$. Докажите, что

$$I = 2\pi \sum_{z_k \in \{|z_k|<1\}} Res_{z_k} \left\{ \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\right\}.$$

Задача 5. **(тип 2)**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx.$$

Пусть $R(x)$ – рациональная функция без полюсов на действительной оси, интеграл I существует (т.е. сходится) и $\lim_{z\to\infty} |zR(z)| = 0$. Докажите, что

$$I = 2\pi i \sum_{z_k \in \{\Im z > 0\}} Res_{z_k} R(z).$$

Задача 6. **(тип 3)**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\lambda x} dx.$$

Пусть $f(x)$ – функция, голоморфная в $\{\Im z \geq 0\}$ за исключением конечного числа точек, $\lambda > 0$ и $\lim_{|z|\to\infty, \Im z > 0} f(z) = 0$. Докажите, что

$$I = 2\pi i \sum_{z_k \in \{\Im z > 0\}} Res_{z_k} \left(f(z)\, e^{i\lambda z}\right).$$

Задача 7. Что нужно изменить в предыдущей задаче, если $\lambda < 0$?

Задача 8. **(тип 4)**

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть $R(x)$ – рациональная функция без полюсов на действительной оси и $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$. Докажите, что

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \sum_{z_k \in \mathbb{C}} Res_{z_k} \frac{R(z)}{z^\alpha}.$$

Задача 9. Вычислить интегралы

а) $\int_0^{2\pi i} \frac{\sin^2 x}{5+3\cos x} dx$;
б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+25} dx$;
в) $\int_0^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2} \frac{\sin ax}{x} dx$;
г) $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$, $0 < \alpha < 1$;
д) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx$;
е) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2} dx$;
ж) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$;
з) (Лаплас, [ЛШ] стр. 441) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$;
и) (Эйлер, [ЛШ] стр. 442) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$;
к) (Эйлер, [ЛШ] стр. 443) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$;
л) (Пуассон, [ЛШ] стр. 444) $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx$;
м) (Лежандр, [ЛШ] стр. 445) $\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} dx$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ РЯДА. [Евг] §30, [ВЛА]) Гл. VI §2

Задача 10. ([Евг] 30.01) Пусть $f(z)$ – рациональная функция с полюсами $a_1, \ldots, a_m$, среди которых нет целых чисел, и пусть $f(z) = O(z^{-2})$ при $z \to \infty$. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} Res_{a_k} \left(f(z) ctg \pi z \right) .$$

Задача 11. ([Евг] 30.02) Пусть $f(z)$ голоморфная функция во всей плоскости $\mathbb{C}$ pf за сключением полюсов $a_1, \ldots, a_m$, среди которых нет целых чисел, и пусть $|f(z)| < e^{a|\Im z|}\epsilon(|z|)$ при $z \in G_r$, где $G_r = \mathbb{C} \setminus \cup_k \{|z - a_k| < r\}$, $0 \le a < \pi$, $\epsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{m} Res_{a_k} \frac{f(z)}{\sin \pi z}.$$

Задача 12. Вычислить суммы:

а) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2}$;
б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$;
в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;
г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n^2+a^2)^2}$;
д) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3}$.

Семинар 10. *10.11.1997*

[Евг] Гл. IV, §21,22, [ВЛА] Гл. IV

Задача 1. Для всех ветвей многозначной функции $f(z)$ вычислить $\oint_{\partial D} f(z)dz$.

(1) ([Евг] 22.04.1) $D = \{|z| < 2,9\}$ $f(z) = \frac{1}{2+\ln(z+3)}$;
(2) ([Евг] 22.04.10) $D = \{|z - 5| < 9/2\}$ $f(z) = \frac{e^z}{\sin(1+\sqrt{z})}$;
(3) ([Евг] 25.05.1) $D = \{|z| < 1/2\}$ $f(z) = \frac{1}{(2+\sqrt{z-1})\sin z}$;
(4) ([Евг] 22.05.11) $D = \{|z - 2| < 5/2\}$ $f(z) = \frac{z+2}{2\pi i - \ln(1+z)}$.

[Евг] Гл. III, [ВЛА] Гл. VIII

Задача 2. Изобразить схемы римановых поверхностей следующих многозначных функций, вычислить род поверхности

а) $w = \sqrt{z}$;
б) $w = \ln z$;
в) $w^2 = z(z - 1)(z + 1)$;
г) $w^2 = z^4 - 1$;
д) $w^3 + z^3 = 1$;
е) $w^4 + z^4 = 1$;
ж) $w^n + z^n = 1$;
з) $w^2 = P_n(z)$, где $P_n(z)$ – многочлен без кратных корней.

Задача 3. Описать римановы поверхности следующих функций:

а) $w = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$.
б) $w = \sqrt{z^2 - 1}$.
в) $w = \sqrt{z(z^2 + 1)}$.
г) $w = \sqrt[3]{z^2 - 1}$

Задача 4. Разложить в ряд Лорана функции $f(z)$ в кольцах с центром в z_0

а) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$;
б) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = 0$;
в) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = i$;
г) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2-\pi^2}$, $z_0 = \pi$;
д) $f(z) = \frac{z^2-\pi^2}{\sin z}$, $z_0 = 0$;
е) $f(z) = \frac{z^2-\pi^2}{\sin z}$, $z_0 = \pi/2$.

Семинар 11. *17.11.1997*

ПРИНЦИП СИММЕТРИИ. [Евг] Гл. VI, §34, [ВЛА] Гл. II, 320 …

Задача 1. Отобразить D на верхнюю полуплоскость

а) Внешность креста $K = \{[-1,1]\} \cup \{[-i,i]\}$;
б) $\mathbb{C} \setminus D_1$, $D_1 = \{(-\infty,-1] \cup [1,\infty) \cup (-i\infty,-i] \cup [i,i\infty)\}$;
в) $\mathbb{C} \setminus D_2$, $D_2 = \{[-1,1] \cup [1+i,-1-i) \cup [1-i,-1+i]\}$; $D = \mathbb{C} - \{[0,-\alpha i] \cup \{|z| = 1, \quad -\pi < arg z < 0\}$.

Задача 2. Найти конформное отображение заданных областей на единичный круг:

Задача 3. Найти число нулей функции $f(z)$ в обасти D:

(1) $f(z) = z^3 - 17z^2 + 3z - 1$, $D = \{|z| < 2\}$;
(2) $f(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$, $D = \{\Re z > 0\}$.

Семинар 12. *24.11.1997*
$\Gamma(z)$. [Евг] Гл. V, §31, [ЛШ] стр. 453, 589

Определение 3. *Гамма-функцией Эйлера* $\Gamma(z)$ называется

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \ \Re z > 0.$$

Задача 1. Докажите, что

а) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;
б) $\Gamma(n+z+1) = (n+z)(n+z-1) \cdot \ldots \cdot z\Gamma(z)$, $n = 1, 2, \ldots, n$;
в) $\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z}$;
г) аналитически продолжается на всю плоскость без $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;
д) $Res_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Задача 2. (Ханкель) Докажите, что

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta,$$

где C – контур

Задача 3. Докажите, что

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right).$$

Задача 4. Найти сумму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.
(Ответ: $-1/2\Gamma'''(1) + 3/2\Gamma'(1)\Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^3$.)

Примеры зачетных задач.

Задача 1. Определить характер особых точек и вычислить в них вычеты.
Задача 2. Вычислить интеграл.
Задача 3. Отобразить конформно данную область на верхнюю полуплоскость.
Задача 4. Найти сумму ряда.
Задача 5. Написать разложение функции в ряд Лорана в различных кольцах с данным центром.
Задача 6. Описать риманову поверхность функции.

Пример задач экзамена по курсу "Теория функций комплексного переменного".
Лектор Белошапка В.К.
2 курс, 3-ий семестр. Вариант 1. 18.12.1994.

В скобках указано число баллов, в которые предварительно была оценена трудность задачи.

Задача 1. (17) $P_{n+1}(z)$ – многочлен степени $n+1$, $f(z)$ – функция, $Q_n(z)$ – интерполяционный многочлен функции $f(z)$, построенный по нулям многочлена $P_{n+1}(z)$ (т.е. $Q_n(z_i) = f(z_i) \Leftrightarrow P_{n+1}(z_i) = 0$). Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i} P_{n+1}(z) \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{P_{n+1}(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z} = f(z) - Q_n(z) \ ,$$

где контур Γ охватывает корни многочлена $P_{n+1}(z)$ и точку z.

Задача 2. (20) Доказать, что уравнение $\tan z = z$ имеет только действительные корни.

Задача 3. (7) На $\mathbb{R} \setminus 0$ задана действительнозначная функция $f(x) = \log x^2$. Можно ли ее продолжить до однозначной голоморфной функции в какой-то области, содержащей $\mathbb{R} \setminus 0$?

Задача 4. (9) Доказать, что аналитическая универсальная накрывающая комплексного тора с выколотой точкой есть круг.

Задача 5. (11) $f(z)$, $g(z)$ – целые функции, удовлетворяющие соотношению $\exp(f(z)) + \exp(g(z)) = 1$. Доказать, что $f(z) = const$, $g(z) = const$.

Задача 6. (13) На плоскости рассматривается треугольник с углами 30,60 и 90 градусов. Доказать, что существует мероморфная функция на плоскости, однозначно отображающая этот треугольник на единичный круг.

Задача 7. (5) Охарактеризовать все особые точки в $\mathbb{C}$ функции $f(z) = \exp(\tan(1/z))$.

Задача 8. (6) Найти число нулей могочлена $f(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$ в правой полуплоскости.

Задача 9. (3) $f(z)$ – целая функция и $|f(z)| \leq const|z|^k$. Доказать, что $f(z)$ многочлен.

Задача 10. (4) Найти все возможные разложения функции $f(z) = \frac{7z-2}{(z+1)(z-2)}$ в ряд Лорана в кольцах с центром в нуле.

Задача 11. (5) Доказать, что $u(x,y) = \Re f(z)$, где $f(z)$ – голоморфная функция в круге $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$.

Литература.

[Евг] Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. "Сборник задач по теории аналитических функций", "Наука", М., 1969

[ВЛА] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. "Сборник задач по теории функций комплексного переменного", "Наука", М., 1975

[ЛШ] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. "Методы теории функции комплексного переменного", "Наука", М., 1973