НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Задачи экзамена по курсу "Комплексный анализ".
Лектор – Белошапка В.К.
Семинары – Кулаков А.Г., Немировский С.Ю.
2 курс, 3-ий семестр, 14.12.1997. Продолжительность экзамена 4 часа.
В скобках указано число баллов, в которые предварительно оценена трудность задачи.

Задача 1. (3) Пусть $f(z) \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \in D$. Пусть $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = a$. Найти $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Задача 2. (8) Пусть $f(z) \in \mathcal{O}(\Delta) \cup C^0(\bar{\Delta})$, где $\Delta = \{|z| < 1\}$. Доказать, что $\forall \epsilon > 0$ существует многочлен $P = P(z)$ такой, что $|P(z) - f(z)| < \epsilon$, $\forall z \in \bar{\Delta}$.

Задача 3. (5) Найти число нулей многочлена $P(z) = z^7 + 2z^4 + 3z^3 + 1$ в первом квадранте $\{\Re z > 0, \Im z > 0\}$.

Задача 4. (4) Доказать, что вещественная часть голоморфной функции удовлетворяет принципу максимума.

Задача 5. (6) Пусть $D_{a,b} = \Delta \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$. Найти условия, при которых $D_{a,b}$ конформно эквивалентно $D_{a',b'}$.

Задача 6. (4) Найти все решения $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ уравнения $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \sin z$.

Задача 7. (8) Пусть $f_k \to f$ равномерно на компактах в области D. Если f_k – однолистные голоморфные, то f либо константа, либо голомофная однолистная функция. Доказать.

Задача 8. (10) Пусть $P(z, w)$ – многочлен от двух комплексных переменных. Пусть $P = 0$ при $z = \bar{w}$. Тогда $P \equiv 0$. Доказать.

Задача 9. (4) Пусть $f(z) \in \mathcal{O}(\Delta^*)$ и $|f(z)| < c|\ln|z||$, $c > 0$. Докажите, что f продолжается в точку $0 \in \Delta$.

Задача 10. (8) Найти группу голоморфных автоморфизмов кольца $\{r < |z| < R\}$, $0 < r < R < \infty$.