Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

ЛЕКЦИЯ 1

8 сентября 1997 г.

Полмножество X линейного пространства V называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками $a, b \in X$ оно содержит весь отрезок с концами в этих точках: $[a, b] \subset X$. Примеры выпуклых множеств:

Пример 1 точка

Пример 2 отрезок

Пример 3 шар (в пространстве любой размерности !).

Доказательство Пусть o — центр шара Ω, а R — его радиус. Тогда $a, b \in \Omega \Leftrightarrow |oa|, |ob| \leq R$. Несложная теорема элементарной планиметрии утверждает, что если $x \in [a, b]$, то $|ox| \leq \max(|oa|, |ob|)$ и, следовательно, $|ox| \leq R$, что и означает, что $x \in \Omega$. ■

Предложение 1 *Пересечение выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство Пусть все множества X_α выпуклы, и $a, b \in \bigcap_\alpha X_\alpha$. Для всякой точки $x \in [a, b]$ и каждого индекса α верно, что $x \in X_\alpha$ — в силу выпуклости множества X_α. Поэтому $x \in \bigcap_\alpha X_\alpha$, т.е. пересечение выпукло. ■

Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество $Y \subset V$, называется *выпуклой оболочкой* Y и обозначается $\operatorname{co} Y$. В силу Предложения 1 $\operatorname{co} Y$ — выпуклое множество; если само Y выпукло, то, очевидно, $\operatorname{co} Y = Y$.

Теорема 1 $\operatorname{co} Y$ *состоит из всех точек вида* $\sum_k \lambda_k y_k$, *где точки* $y_k \in Y$, *а числа* $\lambda_k \geq 0$ *и* $\sum_k \lambda_k = 1$.

Точки мы умножаем на числа и скадываем, как векторы в линейном пространстве.

Доказательство Обозначим множество сумм $\sum_k \lambda_k y_k$ через Λ.

Множество Λ выпукло. Действительно, пусть $p=\sum_k \lambda_k y_k$, $q=\sum_l \mu_l z_l$, где $y_k, z_l \in Y$, а числа λ_k и μ_l уловлдетворяют условиям теоремы. Точка $x\in[p,q]$, делящая этот отрезок в отношении $t:(1-t)$, считая от точки p, равна $(1-t)p+tq=(1-t)\sum_k \lambda_k y_k + t\sum_l \mu_l z_l$. Нетрудно видеть, что $x\in\Lambda$.

Докажем теперь, что $\Lambda\subset \operatorname{co} Y$. Делать мы это будем индукцией по числу N слагаемых в сумме $\sum_{k=1}^N \lambda_k y_k$. База индукции $N=2$ это определение выпуклого множества (убедитесь !). Пусть для сумм, содержащих не более N слагаемых, теорема доказана, и пусть $a=\sum_{k=1}^{N+1}\lambda_k y_k$. При этом, конечно, предполагается, что все $\lambda_i\neq 0$, иначе реально сумма содержит не более N слагаемых. Точка $b=\frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k y_k}{\sum_{k=1}^N \lambda_k}=\frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k y_k}{1-\lambda_{N+1}}\in \operatorname{co} Y$ по предположению индукции. По определению выпуклого множества точка $a=(1-\lambda_{N+1})b+\lambda_{N+1}y_{N+1}$ также принадлежит $\operatorname{co} Y$. ■

Точка $a\in X$ (где X — выпуклое множество) называется *вершиной*, если множество $X\setminus\{a\}$ выпукло.

Теорема 2 *Точка $a\in X$ является вершиной тогда и только тогда, когда*

1. *Не существует отрезка $[p,q]\subset X$, для которого a является внутренней точкой.*

2. *Существует линейная функция φ (на линейном пространстве V, в котором лежит множество X) такая, что $\varphi(a)=0$ и $\varphi(x)>0$ для любого $x\in X\setminus\{a\}$.*

Мы не будем доказывать необходимость условия 2 (т.е., то, что функция φ существует для любой вершины). Остальное:

Доказательство

1. Необходимость условия 1: пусть a — вершина, а 1 не выполнено, т.е. найдется отрезок $[p,q]$ с концами в множестве X, для которого a является внутренней точкой. Тогда концы этого отрезка принадлежат множеству $X\setminus\{a\}$, а его внутренняя точка a — не принадлежит. Поэтому множество $X\setminus\{a\}$ не является выпуклым, вопреки тому, что a — вершина.

2. Достаточность условия 1: пусть a вершиной не является, т.е. множество $X\setminus\{a\}$ не является выпуклым. Следовательно, существует отрезок $[p,q]$, концы которого принадлежат $X\setminus\{a\}$, а одна из внутренних точек — не принадлежит. Поскольку само X по условию выпукло, этой внутренней точкой может быть только a.

3. Достаточность условия 2: докажем сперва, что множество $\Phi_+=\{x\in V:\varphi(x)>0\}$ выпукло. Действительно, пусть $p,q\in\Phi_+$, т.е. $\varphi(a),\varphi(b)>0$. Если точка x принадлежит отрезку $[p,q]$ и делит его в отношении $\lambda:(1-\lambda)$, считая от точки a, то в силу линейности φ имеем $\varphi(x)=(1-\lambda)\varphi(a)+\lambda\varphi(b)>0$, т.е. $x\in\Phi_+$, и Φ_+ выпукло. Но тогда, согласно Предложению 1, выпукло и множество $\Phi_+\cap X$. Но по условию теоремы $\Phi_+\cap X=X\setminus\{a\}$. Следовательно, a — вершина. ■

Ребром выпуклого множества X называется отрезок $\gamma \subset X$ такой, что $X \setminus \gamma$ — выпуклое множество. Совершенно аналогично Теореме 2 доказывается, что если существует линейная функция, равная 0 на γ и положительная во всех остальных точках множества X, то γ — ребро.

Выпуклая оболочка конечного множества точек называется *выпуклым многогранником*. Нетрудно видеть, что выпуклый многогранник (т.е., выпуклый многоугольник) на плоскости, любые две вершины которого соединены ребром, обязательно является треугольником. В трехмерном пространстве такой многогранник обязательно является тетраэдром. В пространствах большего числа измерений аналогичный факт неверен:

Пример 4 Рассмотрим в четырехмерном пространстве выпуклую оболочку точек $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 4, 8, 16), \ldots, a_N = (N, N^2, N^3, N^4)$. Покажем, что у этого многогранника все точки a_k являются вершинами. Для доказательства того, что a_k — вершина, рассмотрим многочлен $P_k(t) = (t-k)^4 \stackrel{\text{def}}{=} p_4t^4 + p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0$. Сопоставим этому многочлену линейную (неоднородную) функция на четырехмерном пространстве $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = p_4x_4 + p_3x_3 + p_2x_2 + p_1x_1 + p_0$. Тогда, как нетрудно видеть, $\varphi(a_s) = (s-k)^4$, т.е. $\varphi(a_k) = 0$ и $\varphi(a_s) > 0$ при $s \neq k$. Поэтому по теореме 2 a_k — вершина.

Докажем теперь, что вершины a_k и a_l соединены ребром. Для этого рассмотрим многочлен $P_{kl}(t) = (t-k)^2(t-l)^2 \stackrel{\text{def}}{=} s_4t^4 + s_3t^3 + s_2t^2 + s_1t + s_0$ и сопоставим ему линейную функцию на четырехмерном пространстве $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = s_4x_4 + s_3x_3 + s_2x_2 + s_1x_1 + s_0$. Нетрудно видеть, что $\varphi(a_s) = (s-k)^2(s-l)^2$, откуда следует, что φ зануляется в точках a_k и a_l и положительна в остальных точках a_i. Значит, a_k и a_l соединены ребром.