Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 11

17 ноября 1997 г.

Построим еще одну модель геометрии Лобачевского. Плоскостью теперь будет служить одна из полостей двуполостного гиперболоида, т.е. множество Π, заданное в трехмерном (евклидовом) пространстве условиями $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $z > 0$. Прямыми мы будем считать пересечения Π с плоскостями в трехмерном пространстве, проходящими через нуль (с "евклидовой" точки зрения эти прямые имеют форму гипербол). Нетрудно видеть, что получилась модель геометрии Лобачевского: через две точки $a, b \in \Pi$ можно провести единственную прямую — это плоскость, проведенная через a, b и начало координат. Любые две несовпадающие плоскости ℓ_1 и ℓ_2, проходящие через начало координат, пересекаются по прямой u. Возможны, однако, три случая расположения прямой u по отношению к Π: она может пересекать Π (что эквивалентно неравенству $x^2 + y^2 - z^2 < 0$ для каждой точки прямой), лежать на поверхности кругового конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (этот конус, или, точнее, "его точки на бесконечности", играют здесь роль абсолюта), или же лежать целиком снаружи от этого конуса ($x^2+y^2-z^2 > 0$ для каждой точки прямой). Первый случай означает, что прямые, соответствующие плоскостям ℓ_1 и ℓ_2, пересекаются, второй — что они параллельны, третий — что расходятся.

Теорема 1 *Аффинные преобразования плоскости Лобачевского в этой модели являются ограничениями на* Π *линейных преобразований трехмерного пространства, сохраняющих* Π.

Доказательство В одну сторону теорема очевидна: если линейное преобразование сохраняет Π, то оно переводит прямые — пересечения Π с плоскостями — в пересечения Π с плоскостями, т.е., прямые. Обратно, пусть имеется преобразование $\varphi : \Pi \to \Pi$, переводящее прямые в прямые. Его можно продолжить до преобразования всего множества $x^2+y^2-z^2 < 0$. Действительно, если для вектора $v \in \mathbb{R}^3$ это неравенство выполнено, то для некоторого λ (положительного или отрицательного) $\lambda v \in \Pi$. Положим теперь $\varphi(v) = \varphi(\lambda v)/\lambda$. Преобразование φ (продолженное) переводит плоскости в плоскости, откуда следует, что оно линейное (ср. с доказательством теоремы 3 лекции 4). Продолжить φ линейным образом на внешнюю часть конуса теперь легко — достаточно взять базис в $I\!R^3$, лежащий целиком внутри конуса. ■

Следствие 1 *Группа* $\mathrm{Aff}_L(2)$ *изоморфна группе* $\mathrm{O}^+(2,1)$ *линейных преобразований трехмерного пространства, сохраняющих билинейную форму* $B(a_1,a_2) = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$ *(здесь* $a_1 = (x_1,y_1,z_1), a_2 = (x_2,y_2,z_2)$ *и переводящий* Π *в себя (а не в симметричное ему относительно начала координат множество* $-\Pi$*).*

Для доказательства достаточно заметить, что линейное преобразование $I\!R^3$ переводит Π в себя или $-\Pi$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит $\mathrm{O}(2,1)$.

Теорема 2 *Аффинно инвариантная риманова метрика в точке* $(x,y,z) \in \Pi$ *задается, с точностью до умножения на константу, формулой* $g(x,y)(dx,dy) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\big((1+y^2)dx^2 + (1+x^2)dy^2 - 2xydxdy\big)$.

Доказательство Пусть бесконечно близкие точки $a = (x,y,z)$ и $a + da = (x+dx, y+dy, z+dz)$ принадлежат Π. Выписывая для них равенства $x^2+y^2-z^2 = -1$ и сравнивая их в первом порядке малости, получим соотношение $xdx + ydy - zdz = 0$.

Обозначим теперь $Q(a) = B(a,a)$ квадратичную форму, соответствующую билинейной форме B. Тогда согласно теореме 1 величина $Q(da)$ сохраняется при аффинных преобразованиях. Вычислим ее:

$$Q(da) = dx^2+dy^2-dz^2 = (1-\frac{x^2}{z^2})dx^2+(1-\frac{y^2}{z^2})dy^2-2\frac{xy}{z^2}dxdy = \frac{1}{1+x^2+y^2}\big((1+y^2)dx^2+(1+x^2)dy^2-2xydxdy$$

Нетрудно проверить, что это положительно определенная форма, т.е., риманова метрика. Но согласно теореме 1 лекции 10 аффинно инвариантная риманова метрика на плоскости Лобачевского существует только одна, с точностью до умножения на константу ■

Рассмотрим теперь модель трехмерного пространства Лобачевского. Основными элементами его служат прямые и плоскости. При этом помимо аксиом, существовавших в двумерном случае, требуется, чтобы

1. через три точки, не лежащие на одной прямой, проходила единственная плоскость;
2. две плоскости, имеющие общую точку, пересекались по прямой;
3. через каждую точку a, лежащую вне плоскости Π, можно было провести по крайней мере 2 плоскости, не имеющие с Π общих точек.

В качестве модели трехмерного пространства Лобачевского мы возьмем верхнее полупространство в $\mathbb{R}^3$, т.е., множество точек (x, y, z), удовлетворяющих неравенству $z > 0$. Плоскостями будут, во-первых, полуплоскости, перпендикулярные абсолюту $z = 0$, и, во-вторых, полусферы, центры которых лежат на абсолюте. Прямыми будут пересечения плоскостей. Нетрудно видеть, что аксиомы трехмерного пространства Лобачевского в этой модели выполнены.

Теорема 3 *Группа* $\mathrm{Aff}_L(3)$ *аффинных преобразований пространства Лобачевского изоморфна группе* $\mathrm{PGL}^{\pm}(1, \mathbb{C})$*, состоящей из дробно-линейных преобразований комплексной плоскости и их композиций с комплексным сопряжением. Изоморфизм осуществляется путем ограничения аффинного преобразования пространства Лобачевского на абсолют.*

Доказательство Нетрудно видеть, что, как и в двумерном случае, аффинное преобразование полностью определяется своим ограничением на абсолют. Поскольку ограничение аффинного преобразования на абсолют переводит окружности и прямые в окружности и прямые (окружности и прямые это пересечения плоскостей с абсолютом), то это ограничение принадлежит группе $\mathrm{PGL}^{\pm}(1, \mathbb{C})$. Тем самым ограничение на абсолют определяет гомоморфизм $\mathrm{Aff}_L(3) \to \mathrm{PGL}^{\pm}(1, \mathbb{C})$, ядро которого тривиально (различные элементы переходят в различные).

Для доказательства того, что ограничение есть изоморфизм, нужно доказать, что всякое преобразование абсолюта $\varphi \in \mathrm{PGL}^{\pm}(1, \mathbb{C})$ продолжается до аффинного преобразования пространства Лобачевского. Нетрудно проверить, что φ можно представить в виде композиции конечного числа параллельных переносов, поворотов, гомотетий, симметрий относительно прямой и инверсий относительно окружностей. Поэтому достаточно доказать, что такие преобразования абсолюта продолжаются до преобразований полупространства, переводящих сферы и плоскости в сферы и плоскости (это условие и означает аффинность). Продолжение таково:

- Параллельному переносу абсолюта сопоставляется параллельный перенос полупространства на тот же вектор;

- Гомотетии соответствует гомотетия с тем же центром и коэффициентом (нетрудно видеть, что коэффициент всегда можно считать положительным).

- Повороту абсолюта вокруг точки a соответствует поворот полупространства на тот же угол относительно прямой, проходящей через a и перпендикулярной абсолюту.

- Симметрии абсолюта относительно прямой ℓ соответствует симметрия полупространства относительно плоскости, проходящей через ℓ и перпендикулярной абсолюту.

- Инверсии абсолюта относительно окружности ω соответствует инверсия полупространства относительно полусферы, перпендикулярной абсолюту и пересекающейся с ним по ω.

Проверка того, что инверсия пространства есть аффинное преобразование (для остальных преобразований это очевидно) — хорошее упражнение. ■

Трехмерное пространство Лобачевского допускает и другие модели. В частности, существует полный аналог рассмотренной в начале лекции модели с гиперболоидом. Здесь пространство Лобачевского отождествляется с множеством $\Psi \subset \mathbb{R}^4$, заданным условием $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1$, $t > 0$. Аналогично следствию 1 получается

Следствие 2 *Группа* $\mathrm{Aff}_L(3)$ *изоморфна группе* $\mathrm{O}^+(3,1)$ *линейных преобразований четырехмерного пространства, сохраняющих билинейную форму* $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$ *и переводящих множество* Ψ *в себя (а не в* $-\Psi$*).*