Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 2

15 сентября 1997 г.

Поправка к лекции 1: теорема о том, что для каждой вершины существует линейная функция, обращающаяся в этой вершине в нуль, а в остальных точках множества положительная, неверна. Верно, что для каждой точки границы выпуклого множества существует линейная функция, обращающаяся в этой точке в нуль, неотрицательная во всех точках множества и положительная хотя бы в одной из них.

Линейным пространством (над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел) называется множество V (элементы которого называются *векторами*), на котором определены две операции:

- Операция *сложения* сопоставляет двум векторам $x, y \in V$ вектор $x + y \in V$.
- Операция *умножения на число* сопоставляет вектору $x \in V$ и числу $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор $\lambda x \in V$.

При этом требуется, чтобы выполнялись следующие свойства:

1–4. Коммутативность: $\forall x, y\ x + y = y + x$, ассоциативность: $\forall x, y, z\ (x + y) + z = x + (y + z)$, существование нуль-вектора: $\exists \vec{0} \forall x\ x + \vec{0} = x$, существование обратного вектора: $\forall x \exists - x\ x + (-x) = \vec{0}$. Иными словами, относительно сложения линейное пространство является абелевой группой (если Вы не поняли этой фразы, ничего страшного).

5–7. Свойства умножения на число — ассоциативность: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, свойство нуля: $\forall x\ 0x = \vec{0}$, свойство единицы: $\forall x\ 1x = x$.

8–9. Дистрибутивности: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V\ (\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x$ и $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

Примерами линейных пространств служат обычные плоскость и трехмерное пространство.

Множество векторов $x_1, \ldots, x_n \in V$ называется *базисом*, если для каждого вектора $y \in V$ существуют и единственны числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что $y = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Если требуется только существование $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то система векторов называется полной, если только единственность — линейно независимой. Имеет место

Теорема 1 *Все базисы данного пространства V содержат одно и то же число векторов. В любой полной линейно зависимой системе векторов больше, чем в базисе, в любой линейно независимой неполной системе векторов меньше, чем в базисе.*

Число элементов в (любом) базисе называется *размерностью* $\dim V$ пространства V. Если в пространстве V нет (конечного) базиса, то оно называется бесконечномерным. Размерность плоскости равна двум; базис образуют любые два неколлинеарных вектора. Размерность трехмерного пространства равна трем (отсюда и название); базис образуют любые три некомпланарных вектора.

Доказывать теорему 1 мы не будем.

Преобразование $A : V \to V$ называется *линейным*, если $A(x + y) = Ax + Ay$ и $A(\lambda x) = \lambda Ax$; здесь $x, y \in V$ — произвольные векторы, а $\lambda \in \mathbb{R}$ — произвольное число.

Зафиксируем в пространстве V базис $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 2 *Для любых векторов $y_1, \ldots, y_n \in V$ существует ровно одно линейное преобразование A такое, что $Ax_1 = y_1, \ldots, Ax_n = y_n$.*

Доказательство Единственность: пусть $Ax_1 = y_1, \ldots, Ax_n = y_n$. Поскольку $x_1, \ldots, x_n$ — базис, для произвольного вектора $z \in V$ однозначно определено представление $z = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Но тогда значение $Az = \lambda_1 Ax_1 + \ldots + \lambda_n Ax_n = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$ также определено однозначно.

Существование: поскольку $x_1, \ldots, x_n$ — базис, для произвольного вектора $z \in V$ однозначно определено представление $z = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$. Положим тогда по определению $Az = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n$. Нетрудно проверить, что так определенное преобразование A — линейное. ■

Векторы $Ax_1, \ldots, Ax_n$ можно вновь разложить по базису $x_1, \ldots, x_n$:

$$Ax_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n, \quad \ldots, \quad Ax_n = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n.$$

Полученные числа a_{ij} согласно теореме 2 могут быть произвольными и определяют преобразование A однозначно. Таблицу $n \times n$ вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называют матрицей преобразования A в базисе $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема 3 *Для линейного преобразования A обратное преобразование A^{-1} существует тогда и только тогда, когда векторы $Ax_1, \ldots, Ax_n$ образуют базис. Преобразование A^{-1} линейно.*

Доказательство Докажем сначала, что если A^{-1} существует, то оно линейно. Пусть $x, y \in V$. Поскольку A^{-1} существует, то существуют и единственны векторы $z, t \in V$ такие, что $x = Az, y = At$. Тогда $A^{-1}(x + y) = A^{-1}(Az + At) = A^{-1}A(z + t) = z + t = A^{-1}Az + A^{-1}At = A^{-1}x + A^{-1}y$. Равенство $A^{-1}\lambda x = \lambda A^{-1}x$ доказывается аналогично — линейность A^{-1} доказана.

Пусть векторы $Ax_1, \ldots, Ax_n$ образуют базис. Тогда A^{-1} есть линейное преобразование, которое на векторах этого базиса принимает значения $x_1, \ldots, x_n$ соответственно. Поэтому существование A^{-1} вытекает из теоремы 2.

Пусть теперь векторы $Ax_1, \ldots, Ax_n$ базиса не образуют. Согласно теореме 1 это означает, что система векторов $Ax_1, \ldots, Ax_n$ неполна: найдется вектор z, не представимый в виде $z = \lambda_1 Ax_1 + \ldots + \lambda_n Ax_n$. Докажем, что в таком случае вектор z вообще не принадлежит образу оператора A. Действительно, если бы выполнялось равенство $z = At$ для некоторого t, то, поскольку $x_1, \ldots, x_n$ — базис, существовало бы представление $t = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$, но тогда $z = \lambda_1 Ax_1 + \ldots + \lambda_n Ax_n$ вопреки предположению. Тем самым образ преобразования A не совпадает со всем пространством V, и A^{-1} не существует. ■

Определителем называется функция, сопоставляющая матрице $A = [a_1, \ldots, a_n]$ (где $a_1, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы, $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \ldots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$) число $\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$, и обладающая такими свойствами:

1. Полилинейность: функция $\det(a_1, \ldots, a_n)$ линейна по каждому своему аргументу — вектору a_i — при фиксированных остальных.

2. Кососимметричность: $\det A$ меняет знак при обмене местами двух произвольных столбцов матрицы A.

3. Нормировка: определитель единичной матрицы (матрицы единичного преобразования) равен 1.

Теорема 4 *Определитель матрицы A выражается формулой*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}. \tag{1}$$

Здесь σ обозначает перестановку, т.е. взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя (иными словами, среди чисел $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ каждое число от 1 до n встречается ровно по одному разу). $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ — четность перестановки σ, а S_n — множество всех возможных перестановок (в нем $n!$ элементов).

Доказательство Нетрудно проверить, что формула (1) действительно определяет функцию на матрицах, обладающую свойствами 1–3. Теперь нужно доказать, что свойства 1–3 определяют функцию однозначно — формула (1) задает единственно возможный определитель. Обозначим e_k столбец, у которого на k-м месте стоит 1, а на остальных местах 0. Тогда $a_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k$, и, применяя последовательно ко всем столбцам матрицы A свойство 1, получим:

$$\begin{aligned}\det(e_k, a_2, \ldots, a_n) &= \sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} \det(e_{k_1}, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n a_{k_1 1} a_{k_2 2} \det(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, a_n) = \ldots = \\ &= \sum_{k_1=1}^n \ldots \sum_{k_n=1}^n a_{k_1 1} \ldots a_{k_n n} \det(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}).\end{aligned}$$

Если среди индексов $k_1, \ldots, k_n$ имеются одинаковые, то согласно свойству 2 $\det(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) = 0$ (поменяем местами два идентичных столбца). Если же среди $k_1, \ldots, k_n$ одинаковых нет, т.е., они образуют перестановку σ, то согласно свойствам 2 и 3 $\det(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) = \varepsilon(\sigma)$. ■

Небольшим уточнением теоремы 4 является

Теорема 4′ *Если функция f на множестве матриц обладает свойствами 1 и 2 определителя (но, вообще говоря, не обладает свойством 3), то $f(A) = c \det A$ для некоторой константы $c = f(E)$, где E — единичная матрица.*

Доказательство точно такое же.

Следствие $\det AB = \det A \det B$.

Доказательство Расмотрим функцию $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(AB)$. Нетрудно видеть, что она удовлетворяет условиям теоремы $4'$. Тогда $\det(AB) = f(E) \det A = \det A \det B$. ■

Важнейшее свойство определителя выражает

Теорема 5 *Для линейного преобразования A обратное преобразование A^{-1} существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы преобразования A (в каком-нибудь базисе $x_1, \ldots, x_n$) отличен от нуля.*

Важное замечание Можно доказать, что определитель матрицы преобразования A не зависит от базиса, в котором эта матрица вычисляется. Поэтому мы можем просто обозначать этот определитель $\det A$.

Доказательство теоремы 5 Если преобразование A имеет обратное A^{-1}, то $\det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det E = 1$, откуда $\det A \neq 0$.

Пусть теперь преобразование A обратного не имеет. Из теорем 1 и 3 следует, что в этом случае векторы $Ax_1, \ldots, Ax_n$ линейно зависимы — существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 Ax_1 + \ldots + \lambda_n Ax_n = 0$. Иными словами, для столбцов $a_1, \ldots, a_n$ матрицы преобразования A выполнено равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0$. Без ограничения общности $\lambda_1 = 1$. Тогда согласно свойствам 1 и 2 определителя имеем:

$$\begin{aligned} \det A &= \det(a_1, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_n) + \lambda_2 \det(a_2, a_2, \ldots, a_n) + \ldots + \lambda_n \det(a_n, a_2, \ldots, a_n) = \\ &= \det(a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n, a_2, \ldots, a_n) = 0. \end{aligned}$$

■

Нетрудно видеть, что множество $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований пространства V является группой — замкнуто относительно взятия композиции преобразований (это очевидно) и взятия обратного (это последнее утверждение теоремы 3). Согласно теоремам 2 и 5 эта группа изоморфна группе всех матриц $n \times n$ с ненулевым определителем.