Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 3

22 сентября 1997 г.

Функция $(\cdot,\cdot)$, заданная на линейном пространстве V, называется *скалярным произведением*, если она линейна по обоим своим аргументам (как говорят, *билинейна*), симметрична ($(x,y)=(y,x)$) и обладает свойством неотрицательности: $(x,x)\geq 0$, и $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Лемма (неравенство Коши–Буняковского–Шварца) $(x,x)(y,y)\geq (x,y)^2$.

Доказательство Рассмотрим функцию $f(t)\stackrel{\text{def}}{=}(x-ty,x-ty)=(x,x)-2t(x,y)+t^2(y,y)$. Этот квадратный трехчлен всюду неотрицателен, поэтому его дискриминант $D=(x,y)^2-(x,x)(y,y)\leq 0$. ■

Множество V называется *метрическим пространством*, если на парах его точек задана функция ϱ (называемая метрикой или расстоянием), обладающая следующими свойствами

1. (неотрицательность) $\forall x,y$ $\varrho(x,y)\geq 0$, и $\varrho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.
2. (симметрия) $\forall x,y$ $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$.
3. (неравенство треугольника) $\forall x,y,z$ $\varrho(x,z)\leq\varrho(x,y)+\varrho(y,z)$.

Теорема 1 *Для любого скалярного произведения функция $\varrho(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}$ задает метрику на линейном пространстве V, обладающую тремя дополнительными свойствами:*

1. *Инвариантность при параллельных переносах: $\varrho(x+z,y+z)=\varrho(x,y)$;*
2. *Положительная однородность степени 1: $\varrho(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\,\varrho(x,y)$;*
3. *Тождество параллелограмма: $\varrho^2(0,x+y)+\varrho^2(x,y)=2(\varrho^2(0,x)+\varrho^2(0,y))$.*

Метрика на линейном пространстве порождается скалярным произведением тогда и только тогда, когда она обладает свойствами 1–3.

Доказательство Определим *норму* вектора x равенством $\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \varrho(0,x)$. Тогда свойство 1 метрики эквивалентно тому, что $\varrho(x,y) = \|x-y\|$ (положим $z=-y$). Свойство 2 в терминах нормы означает, что $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (положительная однородность нормы) и следует из билинейности скалярного произведения. Равенство 3 также следует из билинейности скалярного произведения и проверяется непосредственно.

Требуется проверить теперь, что формула $\varrho(x,y) = \sqrt{(x-y,x-y)}$ действительно определяет метрику. Свойства 1 и 2 метрики очевидны. Для доказательства неравенства треугольника воспользуемся леммой:

$$\begin{aligned}
\varrho(x,z) &= \sqrt{(x-z,x-z)} = \sqrt{(x-y+y-z,x-y+y-z)} = \sqrt{(x-y,x-y)+2(x-y,y-z)+(y-z)^2} \\
&\leq \sqrt{(x-y,x-y)+2\sqrt{(x-y,x-y)(y-z,y-z)}+(y-z,y-z)} = \\
&= \sqrt{(x-y,x-y)}+\sqrt{(y-z,y-z)} = \varrho(x,y)+\varrho(y,z).
\end{aligned}$$

Для доказательства второго утверждения теоремы мы *определим* скалярное произведение равенством $(x,y) = \frac{1}{2}(\,\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$. Симметричность полученного выражения очевидна, неотрицательность (x,x) следует из равенства $(x,x) = \|x\|^2$. Единственное неочевидное свойство — билинейность — легко следует из тождества параллелограмма. ■

Базис $x_1,\ldots,x_n$ пространства V со скалярным произведением называется *ортонормированным*, если $(x_i,x_j)=1$ при $i=j$ и 0 при $i\neq j$. Очень важным является следующий процесс ортогонализации (процесс Грама):

Лемма *Любой базис можно непрерывно продеформировать в ортонормированный.*

Доказательство Процесс деформации будем вести по индукции. Сначала (база индукции) умножим вектор x_1 на число $\lambda_1 = 1/\|x_1\|$ (это можно сделать непрерывной деформацией), получив $x_1' = \lambda_1 x_1$ и $\|x_1'\|=1$. Очевидно, $x_1',x_2,\ldots,x_n$ — базис.

Пусть теперь (шаг индукции) имеется базис $x_1',\ldots,x_k',x_{k+1},\ldots,x_n$, для которого $(x_i',x_j')=0$ при $i\neq j$ и 1 при $i=j$. Положим $x_{k+1}' = x_{k+1} - (x_{k+1},x_1')x_1' - \ldots - (x_{k+1},x_k')x_k'$ (деформацию опять-таки можно сделать непрерывной). Тогда $x_1',\ldots,x_k',x_{k+1}',x_{k+2},\ldots,x_n$ — базис, поскольку число векторов в нем равно n — размерности — и система полная в силу равенства $x_{k+1} = x_{k+1}' + (x_{k+1},x_1')x_1' + \ldots + (x_{k+1},x_k')x_k'$ (мы выразили элементы базиса $x_1',\ldots,x_k',x_{k+1},\ldots,x_n$ через элементы системы $x_1',\ldots,x_k',x_{k+1}',x_{k+2},\ldots,x_n$ — значит, она полная). С другой стороны, $(x_{k+1}',x_i')=0$ при $i\leq k$. Осталось, как на первом шаге, разделить вектор x_{k+1}' на его норму. ■

Следствие 1 *Для любого скалярного произведения на линейном пространстве ортонормированные базисы существуют.*

Следствие 2 *Для любых двух скалярных произведений $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$ (на одном и том же линейном пространстве V) существует такой обратимый линейный оператор $A : V \to V$, что $(x,y)_1 = (Ax, Ay)_2$.*

Доказательство Рассмотрим базис $e_1, \ldots, e_n$, ортонормированный в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_1$ и аналогичный базис $f_1, \ldots, f_n$ для скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_2$. Рассмотрим линейный оператор A такой, что $Ae_i = f_i$ для всех i. Непосредственно проверяется, что для произвольных векторов $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ и $y = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$ верно равенство $(x,y)_1 = \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n = (Ax, Ay)_2$. ■

Теорема 2 *Для каждого линейного преобразования A существует и единственно преобразование A^* (называемое сопряженным), обладающее свойством $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех $x, y, \in V$. Если базис $x_1, \ldots, x_n$ — ортонормированный, то матрицы преобразований A и A^* отличаются транспонированием (заменой строк на столбцы и наоборот).*

Доказательство Если (a_{ij}) — матрица преобразования A в ортонормированном базисе x_i, то, как нетрудно видеть, $a_{ij} = (x_i, Ax_j)$. Отсюда следует, что матрицы преобразований A и A^* в таком базисе отличаются транспонированием.

Существование A^*: возьмем ортонормированный базис, и рассмотрим преобразование A^*, матрица которого в этом базисе отличается от матрицы преобразования A транспонированием. Тогда равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$ выполнено, если x и y — базисные векторы. Но в силу билинейности скалярного произведения это равенство выполнено тогда и для любых векторов x и y.

Единственность A^*: возьмем ортонормированный базис, тогда матрица A^* в этом базисе отличается от матрицы преобразования A транспонированием, т.е., определена однозначно. Поэтому преобразование A^* тоже определено однозначно. ■

Теорема 3 *Линейное преобразование A сохраняет скалярное произведение тогда и только тогда, когда $AA^* = E$.*

Доказательство Пусть $(Ax, Ay) = (x, y)$ для всех $x, y \in V$. Тогда $(AA^*x - x, y) \equiv 0$. Полагая $y = AA^*x - x$, получим, что $\|AA^*x - x\| \equiv 0$, т.е. $AA^*x \equiv x$, и $AA^* = E$. Обратное утверждение доказывается так же. ■