Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 4

29 сентября 1997 г.

Аффинным пространством называется множество L, для которого определено отображение в линейное пространство V, сопоставляющее каждой паре точек $a, b \in L$ вектор $b - a \in V$ так, чтобы выполнялись такие требования:

1. $(b - a) + (c - b) = c - a$;
2. Для всякого вектора $v \in V$ и для каждой точки $a \in L$ существует ровно одна точка $b \in L$ такая, что $b - a = v$.

Из свойств 1–2 вытекает немедленно, что $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$. Более того, свойство 2 позволяет отождествить L с V, а именно: зафиксируем какую-нибудь точку $a \in L$ и сопоставим каждому вектору $v \in V$ точку $b \in L$ такую, что $b - a = v$. Согласно свойству 2 это соответствие будет взаимно однозначным. Его недостатком является зависимость от выбора "начала отсчета" a — при ином выборе соответствие $L \leftrightarrow V$ будет иным.

Преобразование $B : L \to L$ называется *аффинным*, если оно непрерывно и переводит равные векторы в равные векторы: $x - y = z - t \Rightarrow B(x) - B(y) = B(z) - B(t)$. Примером аффинного преобразования является параллельный перенос T_v на вектор $v \in V$, сопоставляющий каждой точке x такую точку y, что $y - x = v$ (здесь просто $T_v(x) - T_v(y) = x - y$). Обратимые аффинные преобразования образуют группу, которую мы будем обозначать $\mathrm{Aff}(L)$.

Пусть B — аффинное преобразование. Для каждого вектора $v \in V$ однозначно определен вектор $\widetilde{B}(v) \in V$ равенством $\widetilde{B}(v) = B(x) - B(y)$, где x, y — произвольная пара точек такая, что $x - y = v$. Таким образом, для каждого аффинного преобразования B определен оператор $\widetilde{B} : V \to V$.

Теорема 1 *Преобразование $\widetilde{B}$ линейно. Сопоставление $B \mapsto \widetilde{B}$ является гомоморфизмом групп $\mathrm{Aff}(L) \to \mathrm{GL}(V)$, ядро которого состоит из всех параллельных переносов, а образом является вся группа $\mathrm{GL}(V)$.*

Доказательство Рассмотрим три точки $x, y, z \in L$ такие, что $y - x = v_1$, $z - y = v_2$. Тогда $z - x = v_1 + v_2$, и $\widetilde{B}(v_1 + v_2) = B(z) - B(x) = (B(z) - B(y)) + (B(y) - B(x)) = \widetilde{B}(v_1) + \widetilde{B}(v_2)$.

Докажем теперь, что

$$\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda \widetilde{B}(v). \tag{1}$$

Прежде всего заметим, что $\widetilde{B}(0) = \widetilde{B}(0 + 0) = \widetilde{B}(0) + \widetilde{B}(0)$, откуда следует, что $\widetilde{B}(0) = 0$. Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{N}$ — целое положительное число. Тогда $\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(v) + \ldots + \widetilde{B}(v)$ (λ раз) $= \lambda \widetilde{B}(v)$. Если теперь $\lambda \in \mathbb{Z}$ отрицательно, то $-\lambda \in \mathbb{N}$, откуда $\widetilde{B}(\lambda v + (-\lambda) v) = \widetilde{B}(\lambda v) - \lambda \widetilde{B}(v) = \widetilde{B}(0) = 0$, т.е. $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda \widetilde{B}(v)$. Тем самым равенство (1) доказано для целых λ.

Пусть теперь $\lambda = p/q \in \mathbb{Q}$. Тогда мы знаем, что $q\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(q\lambda v) = \widetilde{B}(pv) = p\widetilde{B}(v)$, откуда вытекает равенство (1) уже для рациональных λ. Для доказательства (1) при произвольном действительном λ мы воспользуемся непрерывностью $\widetilde{B}$ (это единственное место в доказательстве, где она требуется) и тем фактом, что всякое действительное число можно приблизить рациональными с любой точностью.

Тем самым доказано, что оператор $\widetilde{B}$ линеен. Если B обратим, то нетрудно видеть, что обратим и $\widetilde{B}$, причем $\widetilde{B^{-1}} = \widetilde{B}^{-1}$. Равенство $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ очевидно, поэтому сопоставление $B \mapsto \widetilde{B}$ действительно является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма состоит из аффинных преобразований B, обладающих свойством $B(x) - B(y) = x - y$ для всех x, y. Следовательно, вектор $v \stackrel{\text{def}}{=} B(x) - x$ не зависит от x, и B является параллельным переносом.

Докажем, что образ группы $\mathrm{Aff}(L)$ при построенном гомоморфизме есть вся группа $\mathrm{GL}(V)$. Пусть $A \in \mathrm{GL}(V)$. Зафиксируем точку $a \in L$ и рассмотрим отображение B такое, что $B(x) - a = A(x - a)$. Очевидно, B аффинно, и $\widetilde{B} = A$. ■

Замечание От требования непрерывности преобразования B можно было бы избавиться — результат останется верен — но это сильно усложнит доказательство. См. книгу В.В.Прасолов, В.М.Тихомиров, “Геометрия”).

Напомним кратко некоторые понятия общей теории групп. Пусть G — группа, и $H \subset G$ — подгруппа. Тогда для каждого $g \in G$ множество $gHg^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ также является подгруппой. Подгруппы H и gHg^{-1} называются сопряженными. Подгруппа H называется *нормальной*, если $gHg^{-1} = H$ для любого g. Ядро $\mathrm{Ker}(\varphi)$ произвольного гомоморфизма $\varphi : G \to F$ является нормальной подгруппой: если $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ (т.е., $\varphi(h) = 1$), то $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi^{-1}(g) = 1$. Множество $gH \stackrel{\text{def}}{=} \{gh \mid h \in H\}$ подгруппой в общем случае не является, оно называется левым смежным классом элемента $g \in G$ по подгруппе H. Если подгруппа H нормальна, то смежные классы можно умножать: $g_1 H * g_2 H \stackrel{\text{def}}{=} g_1 g_2 H$, и они образуют группу G/H, называемую факторгруппой G по H. Если $\varphi : G \to F$ —

гомоморфизм групп, образом которого является вся группа F, то факторгруппа $G/\operatorname{Ker}(\varphi)$ изоморфна F.

Тем самым из теоремы 1 вытекает

Следствие *Параллельные переносы образуют нормальную подгруппу в* $\operatorname{Aff}(L)$*, факторгруппа по которой есть* $\mathrm{GL}(V)$*.*

Очевидно, группа параллельных переносов изоморфна линейному пространству V, рассматриваемому как группа по сложению, и поэтому будет тоже обозначаться V.

Непосредственно из определения соответствия $B \mapsto \widetilde{B}$ вытекает, что аффинное преобразование B полностью определяется образом $B(a)$ одной, произвольно взятой, точки $a \in L$ и преобразованием $\widetilde{B}$. Действительно, $B(x) = B(a) + \widetilde{B}(x-a)$ для всякой $x \in L$. При отождествлении $L \leftrightarrow V$, описанном в начале лекции, преобразование B записывается формулой вида

$$x \mapsto Ax + u, \tag{2}$$

где $A = \widetilde{B}$, а вектор $u = B(a)$ зависит от выбора начала отсчета a. Обратно, все преобразования вида (2) — аффинные.

Обозначим $\mathrm{Stab}_a \subset \operatorname{Aff}(L)$ множество обратимых аффинных преобразований, оставляющих точку $a \in L$ на месте.

Теорема 2 Stab_a *является подгруппой* $\operatorname{Aff}(L)$*. Она изоморфна группе* $GL(V)$*. Все подгруппы* Stab_a *(для различных* $a \in L$*) сопряжены; обратно, подгруппа* $H \subset \operatorname{Aff}(L)$*, сопряженная* Stab_a*, имеет вид* Stab_b *для некоторого* $b \in L$*. Подгруппа* $\mathrm{Stab}_a \subset \operatorname{Aff}(L)$ *и подгруппа параллельных переносов* $V \subset \operatorname{Aff}(L)$ *пересекаются только по единичному элементу, а их объединение порождает всю группу* $\operatorname{Aff}(L)$*.*

Доказательство То, что Stab_a — подгруппа, очевидно. Из формулы (2) вытекает, что она изоморфна $GL(V)$: если выбрать точку a началом отсчета, то преобразование $B \in \mathrm{Stab}_a$ будет иметь вид $x \mapsto Ax$.

Если $B \in \mathrm{Stab}_a$, и R — обратимое аффинное преобразование, для которого $R(a) = b$, то преобразование $RBR^{-1} \in \mathrm{Stab}_b$. Отсюда следует третье утверждение теоремы. Для доказательства второго нужно в качестве R взять параллельный перенос на вектор $v = b - a$.

Последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из формулы (2). Действительно, преобразование B представлено в виде композиции преобразования $B_1 \in \mathrm{Stab}_a$, действующего по формуле $B_1(x) = Ax$, и параллельного переноса B_2, действующего по формуле $B_2(x) = x + u$. ■

Замечание Группа $\operatorname{Aff}(L)$ не является прямым произведением групп $\mathrm{GL}(V)$ и T, поскольку элементы подгрупп T и Stab_a не перестановочны: композиция $B_1 \circ B_2$ (сначала B_2, а потом B_1) переводит x в $Ax + Au \neq Ax + u$.

Реализуем теперь n-мерное аффинное пространство L в $n+1$-мерном пространстве W в виде гиперплоскости, не проходящей через начало координат. Если $x, y \in L$, то $x-y \in V$, где V — гиперплоскость, параллельная L и проходящая через начало координат. Эта гиперплоскость и играет роль пространства V в нашем предыдущем определении.

Выберем в пространстве W базис $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ такой, что $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в V, а конец вектора e_{n+1} принадлежит L. Тогда L состоит из векторов, $(n+1)$-ая координата которых в базисе e_i равна 1.

Обозначим Stab_L множество обратимых линейных преобразований пространства W, сохраняющих гиперплоскость L. Иными словами, для $X \in \mathrm{Stab}_L$ верно, что если $v \in L$, то и $Xv \in L$ (но не обязательно $Xv = v$!)

Теорема 3 *Для всякого преобразования $X \in \mathrm{Stab}_L$ его ограничение $X|_L$ на подпространство L является аффинным преобразованием. Обратно, всякое аффинное преобразование $B \in \mathrm{Aff}(L)$ имеет вид $X|_L$ для подходящего $X \in \mathrm{Stab}_L$. Stab_L является подгруппой $\mathrm{GL}(W)$, изоморфной $\mathrm{Aff}(L)$.*

Доказательство То, что $X|_L$ — аффинное преобразование, очевидно (посмотрите определение !). Обратно, любое аффинное преобразование B пространства L можно продолжить до преобразования X всего пространства W. Для вектора $v \in V$ положим $Xv \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{B}v \in V$. Для любого другого вектора v существует и единственно число $\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda v \in L$. В этом случае положим $Xv \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda}B(\lambda v)$. То, что X сохраняет L, очевидно; доказательство линейности X — хорошее упражнение (проделайте !).

Соответствие $X \mapsto X|_L$ задает гомоморфизм групп $\mathrm{Stab}_L \to \mathrm{Aff}(L)$. Из предыдущей конструкции видно, что если $B = X|_L$, то преобразование X определено однозначно. В частности, если B — тождественное преобразование, то и $X = E$. Значит, у описанного гомоморфизма ядро тривиально. Образом его является вся группа $\mathrm{Aff}(L)$ — это также следует из вышеприведенной конструкции. Поэтому этот гомоморфизм является изоморфизмом. ■

В базисе $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ матрицы преобразований $X \in \mathrm{Stab}_L$ имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|c} A & u \\ - & - \\ 0\ldots 0 & 1 \end{array}\right)$$

Здесь A — матрица $n \times n$, являющаяся матрицей преобразования $\widetilde{B}$ (где $B = X|_L$) в базисе $e_1, \ldots, e_n$, а $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — записанный в том же базисе вектор u из представления (2). Здесь при отождествлении $L \leftrightarrow V$ в качестве начала отсчета берется конец вектора e_{n+1}.