Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 5

6 октября 1997 г.

Пусть L — n-мерное аффинное пространство.

Теорема 1 *Преобразование $B : L \to L$ аффинно, если оно непрерывно и переводит прямые в прямые.*

Доказательство Заметим, что если 4 точки a, b, c, d лежат в одной плоскости, то они принадлежат двум пересекающимся прямым. Из этого немедленно следует, что преобразование B переводит также и плоскости в плоскости. Действительно, пара прямых переходит при преобразовании B в пару прямых, а точка пересечения — в точку пересечения. Поэтому образы точек a, b, c, d также лежат на паре пересекающихся прямых, т.е., в одной плоскости. Теперь видно, что преобразование B переводит параллельные прямые в параллельные: действительно, образы параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2 — прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Пусть теперь точки a, b, c, d не лежат на одной прямой и $b-a = d-c$. Это эквивалентно тому, что прямая ab параллельна прямой cd, а прямая ac — прямой bd. Поскольку параллельные прямые переводятся преобразованием B в параллельные, то равные векторы переходят в равные, что и означает аффинность. ■

К доказанному утверждению, казалось бы, имеется контрпример — проектирование (из точки) одной плоскости на другую, ей не параллельную. При этом прямая переходит в прямую, но параллельные прямые перестают быть таковыми, и отображение плоскостей не аффинно. Причина этого состоит в том, что преобразование не везде определено — проектирующий луч может просто не пересечь плоскость проекции. Было бы удобно считать, что в этом случае пересечение все-таки происходит в некоторой бесконечно удаленной точке. Все это мотивирует такое

Определение 1 Проективным пространством P размерности n называется множество проходящих через начало координат прямых в $(n+1)$-мерном линейном пространстве W.

Если в линейном пространстве W ввести базис, то прямая, содержащая ненулевой вектор $w = (w_0, \ldots, w_n)$, состоит из векторов вида $(\lambda w_0, \ldots, \lambda w_n)$, где λ пробегает все действительные числа. Таким образом, можно дать

Определение 2 Проективным пространством P размерности n называется множество наборов из $n+1$ числа, не равного одновременно нулю. При этом два набора, отличающиеся общим ненулевым множителем, считаются одинаковыми.

Обозначение: $P^n = \{(w_0 : \ldots : w_n)\}$. Числа $w_0, \ldots, w_n$ (определенные с точностью до пропорциональности), называются однородными координатами точки проективного пространства.

Зафиксируем в W гиперплоскость L, не проходящую через начало координат, и пусть V — параллельная ей гиперплоскость, проходящая через начало координат. Тогда все прямые в W — т.е., точки P^n — разбиваются на два класса: прямые, пересекающие L, и прямые, лежащие в V. Первые находятся во взаимно однозначном соответствии с точками L (прямой сопоставляется ее точка пресечения с L) и, тем самым, образуют аффинное пространство A. Вторые же образуют проективное пространство Q размерности $n-1$. Тем самым, получено представление $P = Q \cup A$, где A — аффинное n-мерное пространство, а Q — $(n-1)$-мерное проективное. Если базисные векторы $e_0, \ldots, e_{n-1}$ лежат в подпространстве V, а конец вектора e_n — в гиперплоскости L, то аффинное подпространство $A \subset P$ состоит из наборов $(w_0 : \ldots : w_n)$, в которых $w_n \neq 0$, а дополнительное проективное подпространство Q — из наборов с $w_n = 0$. В первом случае $(w_0 : \ldots : w_n) = (w_0/w_n : \ldots : w_{n-1}/w_n : 1)$; числа $(w_0/w_n, \ldots, w_{n-1}/w_n$ (определенные однозначно) называются неоднородными координатами точки. Данному набору однородных координат соответствует $n+1$ набор неоднородных координат — k-й набор $(k = 1, \ldots, n+1)$ определен для точек с $w_k \neq 0$. Иными словами, проективное пространство P покрывается объединением $n+1$ аффинного подпространства $P = A_0 \cup \ldots \cup A_n$.

Пусть K — $(k+1)$-мерное линейное подпространство пространства W. Прямые, лежащие в K, образуют k-мерное проективное подпространство пространства P. Тем самым, в n-мерном проективном пространстве лежат проективные прямые, плоскости, и т.д.

Проективным преобразованием пространства P называется преобразование P, переводящее прямые (проективные, конечно) в прямые. Обратимые проективные преобразования образуют группу, которая обозначается $\mathrm{PGL}(P)$. Естественным примером проективных преобразований являются линейные преобразование пространства W, рассматриваемые с точностью до действия на прямые, проходящие через начало координат, т.е. точки P. Тем самым определен гомоморфизм $\varphi : \mathrm{GL}(W) \to \mathrm{PGL}(P)$.

Теорема 2 *Образом гомоморфизма φ является вся группа $\mathrm{PGL}(P)$. Ядро этого гомоморфизма состоит из всех растяжений — операторов $W \to W$ вида λE, где E — тождественное отображение, а $\lambda \neq 0$.*

Доказательство первого утверждения будет дано в следующей лекции. Докажем сейчас второе.

Доказательство Очевидно, преобразования вида λE оставляют на месте все прямые в W, проходящие через начало координат, и, тем самым, индуцируют тождественное преобразование проективного пространства. Обратно, пусть преобразования $X \in \mathrm{GL}(W)$ оставляет все прямые на месте. Тем самым, $Xw = \lambda w$ для каждого вектора w, и нужно доказать, что λ для всех w одно и то же. Пусть $Xw_1 = \lambda_1 w_1$, $Xw_2 = \lambda_2 w_2$, и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда векторы w_1 и w_2 не пропорциональны. С другой стороны $X(w_1 + w_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda(w_1 + w_2) \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)w_1 + (\lambda - \lambda_2)w_2 = 0$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, среди чисел $\lambda - \lambda_1$ и $\lambda - \lambda_2$ хотя бы одно отлично от нуля, и, следовательно, векторы w_1 и w_2 линейно зависимы. Противоречие. ∎

Таким образом, $\mathrm{PGL}(n) = \mathrm{GL}(n+1)/\{\lambda E\}$ — группа невырожденных матриц, элементы которых рассматриваются с точностью до пропорциональности.

Рассмотрим простейший случай проективной прямой ($n = 1$). Она состоит из точек вида $(x : y) \sim (x/y : 1)$ с $y \neq 0$ — такую точку мы будем обозначать просто $\xi \stackrel{\text{def}}{=} x/y \in \mathbb{R}$ — и "бесконечно удаленной" точки $(x : 0) \sim (1 : 0) \stackrel{\text{def}}{=} \infty$. В неоднородных координатах проективное преобразование, заданное матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, есть $(x : y) \mapsto (ax + by : cx + dy)$, а в неоднородной координате ξ это дробно-линейное преобразование $\xi \mapsto \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$. В последней записи подразумевается, что $-d/c \mapsto \infty$, $\infty \mapsto a/c$. Таким образом, $\mathrm{PGL}(1)$ это группа дробно-линейных преобразований прямой. Преобразования с $c = 0$, образуют, как легко видеть, в $\mathrm{PGL}(1)$ подгруппу Stab_∞, состоящую из преобразований, сохраняющих бесконечно удаленную точку. Эта подгруппа изоморфна группе $\mathrm{Aff}(1)$, состоящей из линейных неоднородных преобразований $\xi \mapsto p\xi + q$.

Теорема 3 *Пусть $P^n = A \cup P^{n-1}$ — описанное выше разбиение проективного пространства на аффинное подпространство и гиперплоскость. Тогда подгруппа $\mathrm{Stab}_{A,Q} \subset \mathrm{PGL}(n)$, состоящая из преобразований, сохраняющих аффинное пространство A и проективное пространство Q, изоморфна $\mathrm{Aff}(L)$, где $L \subset W$ — гиперплоскость (не проходящая через начало координат), которой соответствует A.*

Доказательство Нетрудно видеть, что преобразование из $\mathrm{Stab}_{A,Q}$ это линейное преобразование W, переводящее L в параллельную гиперплоскость. Совокупность таких преобразований после факторизации по растяжениям дает множество линейных преобразований пространства W, сохраняющих L. Но известно, что эта совокупность изоморфна группе $\mathrm{Aff}(L)$. ∎

Преобразования проективного пространства с однородными координатами $(w_0 : \ldots : w_n)$, сохраняющие аффинное подпространство $w_0 \neq 0$ и проективное пространство $x_0 = 0$, изображаются матрицами a_{ij}, у которых $a_{0i} = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, аффинные преобразования проективны: $\mathrm{Aff}(n) \subset \mathrm{PGL}(n)$. Обратное неверно, как мы видели на примере одномерного пространства. Все проектирования (центральные и параллельные) также являются проективными преобразованиями, но, вообще говоря, не аффинны.

Вообще, проективная группа существенно больше аффинной, как свидетельствует такая пара теорем. Назовем набор $a_1, \ldots, a_{n+1}$ точек n-мерного аффинного пространства набором общего положения, если векторы $a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ образуют базис.

Теорема 4 *Для любых наборов $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и $b_1, \ldots, b_{n+1}$ точек общего положения существует ровно одно преобразование $B \in \mathrm{Aff}(L)$, переводящее $a_i \mapsto b_i$, $i = 1, \ldots, n+1$.*

Доказательство Рассмотрим преобразование B такое, что $B(a_1) = b_1$, а линейное преобразование $\widetilde{B}$ переводит базис $a_2 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$ в базис $b_2 - b_1, \ldots, b_{n+1} - b_1$. ■

Назовем набор $a_1, \ldots, a_{n+2}$ точек n-мерного проективного пространства набором общего положения, если соответствующие векторы $v_1, \ldots, v_{n+2} \in W$ обладают таким свойством: любые $n+1$ из них образуют базис.

Теорема 5 *Для любых наборов $a_1, \ldots, a_{n+2}$ и $b_1, \ldots, b_{n+2}$ точек общего положения существует ровно одно преобразование $B \in \mathrm{PGL}(P)$, переводящее $a_i \mapsto b_i$, $i = 1, \ldots, n+2$.*

Доказательство Будем считать точки $a_1, \ldots, a_{n+2}$ и $b_1, \ldots, b_{n+2}$ векторами в W (выберем на каждой прямой по вектору). Требуется найти линейное преобразование $X : W \to W$ такое, что $Xa_i = x_i b_i$, где $x_1, \ldots, x_i$ — какие-то числа. Разложим вектор a_{n+2} по базису $a_1, \ldots, a_{n+1}$, а вектор b_{n+2} по базису $b_1, \ldots, b_{n+1}$: $a_{n+2} = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$, $b_{n+2} = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{n+1} b_{n+1}$. Среди чисел λ_i нет нулей: если $\lambda_k = 0$, то векторы $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_{n+2}$ не образуют базиса. Равенство $Xa_{n+2} = b_{n+2}$ задает на числа x_i систему условий: $\lambda_i x_i = \mu_i x_{n+2}$, которая определяет эти числа однозначно с точностью до пропорциональности. С другой стороны, числа $x_1, \ldots, x_{n+1}$ задают оператор X однозначно, поскольку $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — базис. ■