Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 6

13 октября 1997 г.

Докажем первое утверждение теоремы 2 предыдущей лекции. Пусть преобразование $A : P^n \to P^n$ непрерывно (это требование при желании можно включить в определение) и переводит прямые в прямые. Доказательство будем вести индукцией по n. К $n = 1$ теорема не относится, поэтому базу индукции составляет $n = 2$.

Предположим сначала, что преобразование P оставляет на месте 4 точки общего положения a, b, c, d. Пусть p, q, r, s — точки с координатами (обычными, неоднородными) $(0,0), (0,1), (1,0)$ и $(1,1)$ соответственно, а A — преобразование из образа гомоморфизма φ, переводящее p, q, r, s в a, b, c, d (мы уже знаем, что такое существует). Тогда преобразование $A^{-1}PA$ оставляет на месте p, q, r, s. Из этого следует, что остаются на месте точки бесконечно удаленной прямой, соответствующие горизонтальным и вертикальным прямым. Неподвижна также и точка m с координатами $(1/2, 1/2)$ — это точка пересечения прямых ps и qr. Следовательно, горизонтальная и вертикальная прямые, проходящие через m, неподвижны — обозначим их ℓ_1 и ℓ_2. Неподвижны, следовательно, и точки $\ell_1 \cap pr, \ell_1 \cap qs, \ell_2 \cap pq, \ell_2 \cap rs$ — их координаты $(1/2, 0), (1/2, 1), (0, 1/2)$ и $(1, 1/2)$. Прямые, проходящие через точки p, q, r, s под углом $\pm 45^\circ$ к осям, также неподвижны — поэтому неподвижны их точки пересечения с pr, qs, pq и rs — их координаты $(1/2, 3/2), (3/2, 1/2), (-1/2, 1/2), (1/2, -1/2)$. Продолжая в том же духе, получим, что неподвижны все точки с координатами $(k/2, l/2)$, где k, l — произвольные целые числа.

Такие точки образуют на плоскости квадратную решетку с шагом $1/2$. Применяя предыдущее рассуждение к одному квадрату этой решетки, мы что неподвижны все точки с координатами вида $(k/4, l/4)$ $(k, l \in \mathbb{Z})$, затем $(k/8, l/8)$, и т.д. — все точки с координатами вида $(k/2^n, l/2^n)$. Остальные точки неподвижны по непрерывности. Значит, $A^{-1}PA = E \Rightarrow P = E$.

Пусть теперь преобразование P непрерывно, переводит прямые в прямые, а точки a, b, c, d переводит в некоторые точки a', b', c', d'. Пусть A — преобразование из образа гомоморфизма φ, переводящее a, b, c, d в a', b', c', d'. Тогда $A^{-1}P$ переводит прямые в прямые и сохраняет a, b, c, d на месте. По только что доказанному, $A^{-1}P = E \Rightarrow P = A$. Для $n = 2$ теорема доказана.

Для произвольного n достаточно показать, что преобразование, переводящее прямые в прямые и оставляющее на месте $n+2$ точки общего положения $a_1, \ldots, a_{n+2}$, является тождественным. Рассмотрим (проективное) $(n-1)$-мерное пространство Q, проходящее через точки $a_1, \ldots, a_n$. Оно неподвижно; то же самое верно для прямой $a_{n+1}a_{n+2}$. Следовательно, точка их пересечения b неподвижна. В пространстве Q определено тем самым преобразование, переводящее прямые в прямые и оставляющее на месте $n+1$ точку $a_1, \ldots, a_n, b$ — нетрудно видеть, что общего положения. По предположению индукции это преобразование тождественно. Теперь для каждой точки t рассмотрим прямые $a_{n+1}t$ и $a_{n+2}t$. Они пересекают Q в точках u и v и, следовательно, неподвижны. Поэтому точка t — точка их пересечения — переходит в себя. Теорема доказана.

Случай $n = 1$ рассмотрим более подробно. Для 4 точек на прямой с координатами a, b, c, d определим их *двойное отношение* равенством $[a, b, c, d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$. Здесь подразумевается, что среди точек нет бесконечно удаленной, и никакие две точки не совпадают. Если это условие не выполнено, в качестве двойного отношения можно взять соответствующий предел (который может оказаться бесконечным).

Теорема 1 *Проективные преобразования сохраняют двойное отношение точек прямой. Преобразование проективной прямой проективно тогда и только тогда, когда оно сохраняет двойное отношение.*

Доказательство Для прямой проективные преобразования это дробно-линейные. Сохранение двойного отношения при дробно-линейных преобразованиях проверяется непосредственным вычислением так: пусть $U(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Тогда

$$[U(x_1), U(x_2), U(x_3), U(x_4)] = \frac{\left(\frac{ax_3+b}{cx_3+d} - \frac{ax_1+b}{cx_1+d}\right)\left(\frac{ax_4+b}{cx_4+d} - \frac{ax_2+b}{cx_2+d}\right)}{\left(\frac{ax_3+b}{cx_3+d} - \frac{ax_2+b}{cx_2+d}\right)\left(\frac{ax_4+b}{cx_4+d} - \frac{ax_1+b}{cx_1+d}\right)} = \frac{\frac{(ad-bc)(x_3-x_1)}{(cx_3+d)(cx_1+d)}\frac{(ad-bc)(x_4-x_2)}{(cx_4+d)(cx_2+d)}}{\frac{(ad-bc)(x_3-x_2)}{(cx_3+d)(cx_2+d)}\frac{(ad-bc)(x_4-x_1)}{(cx_4+d)(cx_1+d)}} =$$

$$= \frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)} = [x_1, x_2, x_3, x_4].$$

Обратно, пусть преобразование A сохраняет двойное отношение. Положим $A(p) = p', A(q) = q', A(r) = r'$. Тогда для произвольной точки x и ее образа x' имеем

$$\frac{(r'-p')(x'-q')}{(r'-q')(x'-p')} = \frac{(r-p)(x-q)}{(r-q)(x-p)},$$

откуда следует, что x' выражается через x дробно-линейно.

Пусть теперь A — проективное преобразование пространства P произвольной размерности. Рассмотрим точки a, b, c, d прямой ℓ. Преобразование A переводит прямую ℓ в некоторую другую прямую, ℓ'. Существует ортогональное преобразование $B : P \to P$, переводящее ℓ' в ℓ; поэтому композиция BA оставляет прямую ℓ на месте. Преобразование, индуцируемое BA на прямой ℓ, проективно (поскольку само BA проективно) и, следовательно, сохраняет двойное отношение. Но B заведомо сохраняет двойное отношение — оно сохраняет расстояния. Поэтому A также сохраняет двойное отношение. $\blacksquare$

На четверках точек a, b, c, d проективной прямой действует группа их перестановок S_4. Из теоремы 1 следует, что это действие корректно на двойном отношении:

Следствие *Пусть $\sigma \in S_4$, выполнено равенство $[a, b, c, d] = [p, q, r, s]$ и среди точек a, b, c, d и p, q, r, s нет совпадающих. Тогда $[\sigma(a, b, c, d)] = [\sigma(p, q, r, s)]$.*

Доказательство Из равенства $[a, b, c, d] = [p, q, r, s]$ и отсутствия совпадающих точек следует, что существует преобразование $P \in \mathrm{PGL}(1)$ такое, что $P(a) = p, P(b) = q, P(c) = r, P(d) = s$. Но то же самое преобразование P переводит $\sigma(a)$ в $\sigma(p)$, $\sigma(b)$ в $\sigma(q)$, и т.д. Значит, двойные отношения четверок точек $\sigma(a, b, c, d)$ и $\sigma(p, q, r, s)$ совпадают. $\blacksquare$

Тем самым для всякого числа (двойного отношения) λ и $\sigma \in S_4$ определено число $\sigma(\lambda)$. Явный вид функций $\sigma(\lambda)$ для различных $\sigma \in S_4$ таков:

Теорема 2 *Все преобразования $\lambda \mapsto \sigma(\lambda)$ дробно-линейные. Соответствие $\sigma \mapsto \sigma(\cdot)$ определяет гомоморфизм S_4 в $\mathrm{PGL}(1)$. Ядро гомоморфизма состоит из единичного элемента и перестановок $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$, которые образуют в S_4 нормальную подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Образ гомоморфизма изоморфен группе S_3 и состоит из 6 преобразований: тождественного e, трех преобразований второго порядка $\sigma_1 : \lambda \mapsto 1/\lambda, \sigma_2 : \lambda \mapsto 1 - \lambda, \sigma_3 : \lambda \mapsto \lambda/(\lambda - 1)$, и двух преобразований третьего порядка: $\delta_1 : \lambda \mapsto 1/(1 - \lambda), \delta_2 : \lambda \mapsto (\lambda - 1)/\lambda$.*

Доказательство теоремы производится непосредственным вычислением. Заметим также, что действие группы S_4 на двойное отношение четверки точек устроено точно так же, как ее действие на три возможных разбиения точек на (неупорядоченные) пары: $p_1 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}, p_2 = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}, p_3 = \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$.

Снабдим пространство W скалярным произведением. Теперь для любого линейного подпространства $L \subset W$ размерности k можно рассмотреть ортогональное ему подпространство $L^\perp$ размерности $n + 1 - k$. При переходе к проективизациям мы получим взаимно однозначное соответствие между проективными подпространствами пространства P. При этом подпространству размерности l соответствует (как говорят, проективно двойственно) подпространство размерности $n - l - 1$. В частности, точкам соответствуют гиперплоскости. Нетрудно видеть, что так определенное соответствие инволютивно: если пространству M проективно двойственно пространство N, то проективно двойственное к N есть M.

При переходе к проективно двойственным подпространствам операция пересечения пространств меняется местами с операцией взятия линейной оболочки. Например, если прямая ℓ проходит через точки a и b, то гиперплоскости $a^\perp$ и $b^\perp$ пересекаются по $(n-2)$-мерному подпространству $\ell^\perp$. Это позволяет для каждой теоремы проективной геометрии написать двойственную к ней, заменив все объекты на двойственные.

Пример

Утверждение *Через любые n точек в n-мерном проективном пространстве проходит гиперплоскость (например, через любые две точки проективной плоскости — прямая). Если точки находятся в общем положении, то гиперплоскость единственна.*

Двойственное утверждение *Любые n гиперплоскостей в n-мерном проективном пространстве (например, любые две прямые на проективной плоскости) пересекаются. Если гиперплоскости находятся в общем положении, то пересечение состоит из одной точки.*

Можно рассматривать двойственные объекты для множеств более сложных, чем подпространства. Например, пусть γ — гладкая кривая на проективной плоскости. Для каждой точки $a \in \gamma$ рассмотрим касательную прямую T_a к γ в точке a. Прямой T_a двойственна точка $T_a^\perp$. Точки $T_a^\perp$ заметают новую кривую γ^*, которая называется проективно двойственной к γ.

Теорема 3 *Пусть кривая $\gamma = (\gamma_0(t) : \gamma_1(t) : \gamma_2(t))$ такова, что для всякого момента времени t определитель $\Delta(t) = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_0' & \gamma_1' & \gamma_2' \\ \gamma_0'' & \gamma_1'' & \gamma_2'' \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Тогда кривая $(\gamma^*)^*$ совпадает с исходной с точностью до перестановки однородных координат.*

Доказательство Прежде всего заметим, что условие $\Delta(t) \neq 0$ не зависит от выбора однородных координат: если все координаты $\gamma_i(t)$ умножить на не обращающуюся в нуль функцию $\varphi(t)$, то $\Delta(t)$ умножится на $\varphi^3(t)$.

Непосредственные вычисления показывают, что касательная к кривой γ в момент времени t задается уравнением $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_0' & \gamma_1' & \gamma_2' \end{vmatrix} = 0$. Поэтому γ^* задается как $(\gamma_2(t)\gamma_0'(t) - \gamma_0(t)\gamma_2'(t) : \gamma_0(t)\gamma_1'(t) - \gamma_1(t)\gamma_0'(t) : \gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t))$. Если мы применим то же преобразование к кривой γ^*, то получим кривую $(\gamma_2(t) : \gamma_0(t) : \gamma_1(t))$. Точнее, каждая однородная координата будет умножена на общий множитель $\Delta(t)$. $\blacksquare$