Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 7

20 октября 1997 г.

Говорят, что на множестве M введена структура n-мерного многообразия, если оно покрыто конечным или бесконечным набором подмножеств: $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, для каждого из которых определено *координатное отображение* $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, причем:

1. Все φ_α переводят различные точки в различные.
2. Все *отображения перехода* $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$ — это отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — являются гладкими там, где они определены.

Структура многообразия определяет в M структуру топологического пространства: множество $U \subset M$ открыто, если для каждой точки $x \in M$ найдется $V \subset U$, содержащее x, лежащее в одном из U_α и такое, что $V = \varphi_\alpha^{-1}(W)$, где W — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Утверждения типа "(топологическое пространство) A является многообразием" означает, что в A удается ввести структуру многообразия, порождающую ту топологию, которая в A уже имеется.

Теорема *На топологическом пространстве не могут существовать одновременно две структуры многообразий разных размерностей.*

Доказывать теорему мы не будем (доказательство основано на непростом топологическом факте, что открытые подмножества $\mathbb{R}^n$ при различных n не гомеоморфны).

Пример 1 Окружность S^1 — одномерное многообразие. Покроем его двумя картами: U_1 — все точки, кроме $\varphi = \pi$, координата $\varphi_1 = \varphi$, измеряемая от $-\pi$ до π; U_2 — все точки, кроме $\varphi = 0$, координата $\varphi_2 = \varphi$, измеряемая от 0 до 2π. Отображение перехода на верхней полуокружности $\varphi_2 = \varphi_1$, на нижней полуокружности $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$.

Пример 2 Тор $S^1 \times S^1 \times \dots S^1$ (n раз) — n-мерное многообразие. Здесь возьмем 2^n карт $U_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, получающихся произведениями карт U_1 и U_2, построенных в предыдущем примере. Обобщение этого примера: прямое произведение многообразий — многообразие.

Пример 3 Сфера S^n — n-мерное многообразие. Карт здесь 2, они определяются стереографической проекцией из двух диаметрально противоположных точек. Отображение перехода определено в $\mathbb{R}^n$ без начала координат, и задается формулой $y_i = \frac{4x_i}{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

Пример 4 Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ является n-мерным многообразием. Нужно взять $n+1$ карту, в зависимости от того, какая из однородных координат отлична от нуля. Соответствующие неоднородные координаты составляют отображение φ. Отображения перехода такие: пусть в точке $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ координаты x_k и x_l не равны нулю. Тогда $y_i = x_i/x_k, y'_i = x_i/x_l$, и $y'_k = 1/y_l, y'_s = y_s/y_l$ при $s \neq k$.

Пример 5 Группа $\mathrm{GL}(n)$ является n^2-мерным многообразием. Карта здесь одна (т.е. существует глобальная система координат), координатами являются непосредственно матричные элементы.

Пример 6 Группа $\mathrm{SL}(n)$ является (n^2-1)-мерным многообразием. Достаточно описать координаты в окрестности каждой отдельной точки. Пусть $A \in \mathrm{SL}(n)$ — такая точка, т.е. матрица, для которой $\det A = 1$. Из миноров, дополнительных к элементами первой строки, хотя бы один отличен от нуля; пусть это минор Δ_1, дополнительный к a_{11}. Тогда координатами являются все матричные элементы, кроме a_{11} — значение последнего однозначно определяется равенством $\det A = 1$. Если та же матрица A принадлежит еще одной карте, где в качестве ненулевого минора выбран минор, дополнительный к a_{1k}, то отображение перехода тривиально для всех координат, кроме a_{11}. Для этой координаты $a_{11} = (1 - \sum_{s=2}^n (-1)^s a_{1s}\Delta_s)/\Delta_1$ — гладкое отображение.

Пример 7 Грассманиан $G(n,k)$ — множество k-мерных подпространств в n-мерном пространстве W — является $k(n-k)$-мерным многообразием. Достаточно найти координаты в окрестности некоторой фиксированной точки — подпространства L. Выберем в W базис $e_1, \ldots, e_n$, первые k векторов которого составляют базис в L. Тогда в любом пространстве, достаточно близком к L, существует единственный базис вида $f_1 = e_1 + \alpha_{11}e_{k+1} + \ldots + \alpha_{1,n-k}e_n, f_2 = e_2 + \alpha_{21}e_{k+1} + \ldots + \alpha_{2,n-k}e_n, \ldots$. Числа α_{ij} и являются координатами. Выписать отображения перехода здесь, однако, непросто, т.к. систем координат много — столько же, сколько базисов в W. Если эту работу, тем не менее, проделать, то отображения получатся гладкими.

Аналогично, но более сложно, доказывается, что группа $\mathrm{O}(n)$ является многообразием размерности $n(n-1)/2$.