Математический Колледж НМУ Геометрия, 1 семестр

Лекция 8

27 октября 1997 г.

Напомним (лекция 3), что скалярным произведением в вещественном линейном пространстве называется функция $(\cdot,\cdot)$, линейная по первому аргументу, симметрическая $(u,v) = (v,u)$ (и, следовательно, линейная и по второму аргументу тоже) и положительная: если $u \neq 0$, то $(u,u) > 0$. Примером скалярного произведения в "координатном" пространстве $\mathbb{R}^n$ является $(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Линейные операторы в $\mathbb{R}^n$, сохраняющие скалярное произведение (ортогональные), образуют группу $\mathrm{O}(n)$. Матрица A ортогонального оператора в ортонормированном базисе удовлетворяет равенству $AA^* = E$, где по определению $A^*_{ij} = A_{ji}$. Для определителя ортогональной матрицы имеем $\det A \det A^* = (\det A)^2 = 1$, т.е., $\det A = \pm 1$. Ортогональные операторы с определителем 1 образуют в $\mathrm{O}(n)$ подгруппу (индекса 2), обозначаемую $\mathrm{SO}(n)$.

Изучим строение группы $\mathrm{SO}(3)$.

Теорема 1 *Группа* $\mathrm{SO}(3)$ *гомеоморфна трехмерному проективному пространству* $\mathbb{R}P^3$.

Лемма 1 *У любого преобразования* $A \in \mathrm{SO}(3)$ *существует неподвижный вектор* v.

Доказательство Рассмотрим *характеристический многочлен* преобразования A, заданный равенством $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Он третьей степени, поэтому имеет три комплексных корня, произведение которых по теореме Виета равно $\chi_A(0) = \det A = 1$. Если λ — вещественный корень χ_A, то оператор $A - \lambda E$ вырожден, т.е. существует вектор v такой, что $Av = \lambda v$. Но тогда $(Av, Av) = \lambda^2(v,v) = (v,v)$, откуда $\lambda = \pm 1$. Если все три корня χ_A вещественны (и, следовательно, равны ± 1), то по крайней мере один из них равен 1 (иначе произведение будет -1). Если же веществен только один корень λ, а два других — комплексно сопряженные α и $\overline{\alpha}$, то $\lambda\alpha\overline{\alpha} = \lambda\,|\alpha|^2 = 1$, откуда также $\lambda = 1$. Следовательно, вектор v неподвижный. ■

Первое доказательство теоремы 1 Пусть v — неподвижный вектор преобразования A. Тогда преобразование A сохраняет плоскость L, ортогональную v, и ограничение $A|_L \in \mathrm{SO}(2)$, т.е., является поворотом. Таким образом, преобразованию A сопоставлены: вектор v, который можно считать элементом единичной сферы S^2, и угол поворота φ, изменяющийся от 0 до π. При этом все повороты на угол 0 совпадают (это тождественное преобразование), а поворот вокруг вектора v и на вокруг вектора $-v$ угол π это одно и то же. Поэтому $\mathrm{SO}(3)$ устроено как трехмерный шар, у которого диаметрально противоположные точки границы отождествлены — а это $\mathbb{R}P^3$. ■

Мы дадим еще одно доказательство теоремы 1. Для этого вспомним, что $\mathbb{R}P^3$ гомеоморфно трехмерной сфере S^3, диаметрально противоположные точки которой отождествляются.

Телом кватернионов $\mathbb{H}$ называется четырехмерное линейное пространство (над полем $\mathbb{R}$) с базисом $1, i, j, k$ и ассоциативным, но некоммутативным умножением, заданным по правилу $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Для кватерниона $u = x + iy + jz + kt$ число x называется его вещественной частью: $x = \mathrm{Re}\, u$. Кватернион $\overline{u} = x - iy - jz - kt$ называется сопряженным к u.

Лемма 2 *Сопряжение является антигомоморфизмом:* $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$ *и* $\overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}$. *Формула* $(u, v) = \mathrm{Re}(u\overline{v})$ *определяет на* $\mathbb{H}$ *скалярное произведение.*

Доказательство Равенства $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$ и $\overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}$ проверяются непосредственным вычислением. Линейность $(\cdot,\cdot)$ по первому аргументу теперь очевидна: $(u + w, v) = \mathrm{Re}((u + w)\overline{v}) = \mathrm{Re}(u\overline{v} + w\overline{v}) = \mathrm{Re}(u\overline{v}) + \mathrm{Re}(w\overline{v}) = (u, v) + (w, v)$, и $(\lambda u, v) = \mathrm{Re}(\lambda u\overline{v}) = \lambda\,\mathrm{Re}(u\overline{v}) = \lambda(u, v)$, поскольку число λ вещественное.

Из равенства $\overline{u\overline{v}} = v\overline{u}$ следует, что $\mathrm{Re}(u\overline{v}) = \mathrm{Re}(v\overline{u})$ (действительные части сопряженных кватернионов равны), поэтому форма $(\cdot,\cdot)$ — симметрическая. Положительность следует из того, что при $u \neq 0$ $(u, u) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = |u|^2$ — действительное положительное число (квадрат модуля кватерниона). ■

Кватернионы с единичным модулем образуют трехмерную сферу S^3.

Лемма 3 *Множество G единичных кватернионов является группой по умножению.*

Доказательство Нетрудно заметить, что $|u|^2 = u\overline{u} = \overline{u}u$. Пусть кватернионы u и v имеют единичный модуль. Тогда (по лемме 2) $uv\overline{uv} = uv\overline{v}\,\overline{u} = u\overline{u} = 1$, т.е., G замкнуто относительно умножения. Относительно взятия обратного G тоже замкнуто, как следует из формулы $u^{-1} = \overline{u}/|u|$. ■

Обозначим $\mathcal{I}$ множество кватернионов с нулевой вещественной частью: $x = -\overline{x}$. Каждому элементу $u \in G$ сопоставим линейное преобразование C_u, действующее так: $C_u x = ux\overline{u}$.

Лемма 4 *Все преобразования C_u отображают $\mathcal{I}$ в себя, являются ортогональными и сохраняют ориентацию (т.е., принадлежат группе* $\mathrm{SO}(3)$*).*

Доказательство Для всякого $x \in \mathcal{I}$ имеем $\overline{C_u x} = u\overline{x}\,\overline{u} = -ux\overline{u} = -C_u x$, откуда $C_u x \in \mathcal{I}$. Прямым вычислением проверяется равенство $(u, v) = (\overline{u}, \overline{v})$ (т.е., сопряжение — ортогональный оператор). Теперь:

$$(C_u x, C_u y) = \mathrm{Re}(ux\overline{u}u\overline{yu}) = \mathrm{Re}(ux\overline{yu}) = (ux, uy) = (\overline{xu}, \overline{yu}) = \mathrm{Re}(\overline{xu}uy) = (x, y).$$

То, что C_u сохраняет ориентацию, или, что то же самое, $\det C_u \equiv 1$, можно доказать таким топологическим трюком: рассмотрим непрерывное семейство $u(t) \subset G$ кватернионов единичной длины такое, что $u(0) = 1$, а $u(1) = u$ (t изменяется от 0 до 1). Такое семейство существует — любые две точки трехмерной сферы можно соединить между собой кривой. Тогда определитель $\det C_{u(t)}$ также непрерывно зависит от t. Но этот определитель может принимать только два значения, 1 и -1. Нетрудно проверить, что непрерывная функция на отрезке, принимающая не более двух значений, является константой. Поскольку $C_{u(0)} = E$, эта константа равна 1. ■

Заметим теперь, что $C_{uv} = C_u C_v$, т.е., C является гомоморфизмом группы G в группу сохраняющих ориентацию ортогональных преобразований пространства $\mathcal{I}$, т.е., в $\mathrm{SO}(3)$.

Лемма 5 *Образом гомоморфизма C является вся группа* $\mathrm{SO}(3)$*.*

Из леммы 5 немедленно получается

Второе доказательство теоремы 1 Из леммы вытекает, что группа $\mathrm{SO}(3)$ является фактором группы G по ядру гомоморфизма C. Это ядро состоит из кватернионов u единичной длины, обладающих свойствами $ui\overline{u} = i \Leftrightarrow ui = iu$, и аналогично для j и k — то есть, из кватернионов единичной длины, коммутирующих со всеми чисто мнимыми кватернионами. Нетрудно убедиться, что таких кватернионов только два, 1 и -1. Тем самым $C_u = C_{-u}$, а все остальные преобразования вида C_v с C_u не совпадают. Поэтому отображение C склеивает противоположные точки трехмерной сферы G, и его образ есть $\mathbb{R}P^3$. ■

Для доказательства леммы 5 нам потребуется одно вспомогательное утверждение:

Лемма 6 *Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{I} \cap G$ — два чисто мнимых кватерниона единичной длины. Тогда множество $U_{\alpha\beta}$ кватернионов $x \in G$ таких, что $x\alpha\overline{x} = \beta$, непусто.*

Доказательство Прежде всего заметим, что все кватернионы $\alpha \in \mathcal{I} \cap G$ удовлетворяют уравнению $\alpha^2 = -\alpha\overline{\alpha} = -1$ — разительный контраст со случаем комплексных чисел, где квадратное уравнение имеет не более 2 корней ! Докажем сначала, что $U_{\alpha\beta}$ непусто. Уравнение $x\alpha\overline{x} = \beta$ эквивалентно $x\alpha = \beta x$, и, тем самым, нам нужно доказать существование ненулевого кватерниона x такого, что $x\alpha - \beta x = 0$ (потом мы разделим этот кватернион на его модуль, чтобы получить $x \in G$).

Соответствие $x \mapsto x\alpha - \beta x$ является линейным оператором $M : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Нам нужно доказать, что его ядро нетривиально. Для этого заметим, что $\beta M x \alpha = Mx$. Поскольку существуют кватернионы, для которых $\beta u \alpha \neq u$, образом оператора M является не все линейное пространство $\mathbb{H}$, а, значит, и его ядро нетривиально, и множество $U_{\alpha\beta}$ непусто. ■

Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что подгруппа $U_{\alpha\alpha}$ гомеоморфна окружности. Поэтому достаточно рассмотреть, например, подгруппу U_{ii}. Эта подгруппа состоит в точности из всех "чисто комплексных" кватернионов $p + qi$ единичной длины: $p^2 + q^2 = 1$.

Доказательство леммы 5 Пусть кватернионы α, β, γ образуют правый ортонормированный базис в $\mathcal{I}$. Покажем, что существует элемент $u \in G$ такой, что $C_u i = \alpha$, $C_u j = \beta$, $C_u k = \gamma$. Поскольку $|\alpha| = 1$, разрешимость уравнения $C_u i = \alpha$ следует из леммы 6. Заметим теперь, что при $p = q$ множество U_{pq} является подгруппой группы G, состоящей из всех кватернионов $x \in G$, коммутирующих с p, а в общем случае представляет собой смежный класс по этой подгруппе, т.е., множество вида xU_{pp}, где x — любой элемент U_{pq}. Нетрудно видеть, что при разных p подгруппы U_{pp} сопряжены (элементом, сопрягающим U_{pp} и U_{qq} служит любой элемент U_{pq}), и поэтому гомеоморфны друг другу. Подгруппа U_{ii} состоит в точности из всех "чисто комплексных" кватернионов $\lambda + \mu i$ единичной длины: $\lambda^2 + \mu^2 = 1$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $a \in U_{i\alpha}$. Поскольку все преобразования C_u ортогональны (по лемме 4), кватернион $C_{\overline{a}}\beta$ — единичной длины и ортогонален $C_{\overline{a}}\alpha = i$. Поэтому он имеет вид $j\xi + k\zeta$ для некоторых $\xi^2 + \zeta^2 = 1$. Нетрудно проверить непосредственно, что найдется кватернион $b \in U_{ii}$ такой, что $C_b j = C_{\overline{a}}\beta$. Тогда преобразование C_u при $u = ab$ переводит i в α, а j в β. Поскольку по лемме 4 преобразование C_u ортогональное и сохраняет ориентацию, равенство $C_u k = \gamma$ будет соблюдаться автоматически. ■