ГЕОМЕТРИЯ, 1 курс, семинары 10–11

Задача 1 Выпишите аффинно инвариантную метрику плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в единичном круге.

Задача 2 Докажите, что окружность в аффинно инвариантной метрике плоскости Лобачевского изображается окружностью в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости и в модели Пуанкаре в единичном круге.

Задача 3 Докажите, что множество точек, равноудаленных от двух данных на плоскости Лобачевского, есть прямая.

Задача 4 Опишите все возможные конфигурации неподвижных точек (включая точки на абсолюте) аффинного преобразования плоскости Лобачевского.

Ответ Одна неподвижная точка (эллиптическое движение), одна неподвижная точка на абсолюте (параболическое движение), две неподвижных точки на абсолюте (гиперболическое движение), неподвижная прямая (несобственное движение — симметрия относительно прямой), тождественное преобразование.

Задача 5 Докажите, что композиция двух симметрий относительно прямых является эллиптическим движением, если прямые пересекаются, параболическим, если они параллельны, и гиперболическим, если прямые расходятся.

Задача 6 Докажите, что

1. любое эллиптическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в круге) евклидовому повороту;
2. любое параболическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в полуплоскости) евклидовому сдвигу (вдоль границы);
3. любое гиперболическое движение сопряжено (в модели Пуанкаре в полуплоскости) евклидовому растяжению.

Задача 7 Докажите, что если две прямые перпендикулярны третьей, то они расходятся, и напротив, у двух расходящихся прямых существует общий перпендикуляр.

Задача 8 Докажите, что множество точек, удаленных на постоянное расстояние от фиксированной прямой плоскости Лобачевского (эквидистанта), не является прямой плоскости Лобачевского, но изображается окружностью (или прямой) в модели Пуанкаре.

Указание Понятие эквидистанты аффинно инвариантно.

Задача 9 ABC — прямоугольный треугольник на плоскости Лобачевского с катетами a, b и гипотенузой c. Докажите равенства $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$ и $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \angle BAC$. Во что переходят эти равенства, если треугольник бесконечно малый ?

Задача 10 Пусть l — прямая в плоскости Лобачевского, z_0 — точка, ϱ — расстояние от точки z_0 до прямой l, m — прямая, параллельная l и проходящая через z_0, α — угол между m и перпендикуляром из точки z_0 к прямой l. Докажите, что $\operatorname{tg} \alpha = e^{-\varrho}$.

Дефектом $\Delta(ABC)$ треугольника ABC с углами α, β, γ назовем $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Задача 11 Докажите неравенство $0 < \Delta(ABC) < \pi$.

Задача 12 Пусть $D \in [BC]$. Докажите, что $\Delta(ABC) = \Delta(ADC) + \Delta(ADB)$.

Задача 13 Многоугольник разбит на треугольники. Докажите, что сумма их дефектов не зависит от способа разбиения.

Задача 14 Докажите, что дефект аффинно инвариантен.

Задача 15 Выведите из задач 13 и 14 существование такого числа γ, что для всякого треугольника ABC $S(ABC) = \gamma\Delta(ABC)$, где буквой S обозначена площадь.

Задача 16 Вычислите дефект и площадь треугольника, все вершины которого лежат на абсолюте. Чему равна константа γ в задаче 15 ?