**Задача 1** Докажите, что следующие множества многочленов образуют линейное простанство, укажите какой-нибудь базис и найдите размерность:

1. $V_1 = \{P(x) | deg(P) \leq 5,\ P(1) + P(2) = 0\}$;
2. $V_2 = \{P(x) | deg(P) \leq 6,\ P'(1) + P(-1) = 0\}$.

**Задача 2** Пусть $V = \{e^x P(x)\}$, где $P(x)$ — многочлен.

1. Является ли $V$ линейным пространством? Какова его размерность?
2. Является ли отображение $\frac{d}{dx} : V \to V$ линейным?
3. Напишите его матрицу в каком-нибудь базисе.
4. Обратимо ли оно? Если, да, то напишите обратную матрицу.

**Задача 3** $M_2 = \{P(x) | deg(P) \leq 2\}$. Докажите следующую формулу $(1 + \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2})P(x) = P(x+1)$. Как должна выглядеть формула для многочленов 3-ей степени?

**Задача 4** Пусть $F =$ Найдите $AF$, где $A =$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

**Задача 5** Найдите матрицу умножения на комплексное число $a + ib$ в базисе $1, i$.

**Задача 6** Решите системы в общем виде

1. $\begin{cases} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2, \end{cases}$;
2. $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{cases}$

**Задача 7** (теорема Радона) Пусть $S = \{s_1, \ldots, s_{n+2}\}$ – множество точек $n$-мерного пространства. Докажите, что $S$ можно разбить на два подмножества ($S = T \cup U$, $T \cap U = \emptyset$) таких, что $\mathrm{conv}(T) \cap \mathrm{conv}(U) \neq \emptyset$.

**Задача 8** (теорема Хелли) В $n$-мерном пространстве заданы $k$ ($k \geq n+1$) выпуклых множества $X_1, \ldots, X_k$. Если любые $n+1$ из этих множеств имеют непустое пересечение, то все они имеют общую точку.

**Задача 9** Найдите вершины и опишите форму сечения плоскостью $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ многограника $P$ в четырехмерном пространстве, заданного системой неравенств:

$$x_i \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \quad x_4 \leq 1.$$

**Задача 10** Для многогранника, заданного как выпуклая оболочка столбцов матрицы $A$, напишите систему линейных неравенств, задающих многогранник и найдите все его трехмерные грани.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Задача 11** Пусть $m$ точек в $\mathbb{R}^n$ обладают следующим свойством: многогранник, являющийся выпуклой оболочкой любых $n+2$ из заданных точек, имеет $n+2$ вершины ($m \geq n+2$). Докажите, что многогранник, являющийся выпуклой оболочкой всей $n$ заданных точек, имеет $n$ вершин.

**Задача 12** Найдите все матрицы, коммутирующие с матрицей $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

**Задача 13** Вычислите: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n$.