Задача 1 Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\dots & n \\ -1 & 0 & \dots & n \\ \dots & & & \\ -1 & -2 & -3\dots & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\dots0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0\dots0 & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots-1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\dots & 0 \\ 1 & 2 & 1\dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0\dots & 2 \end{vmatrix}$;
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3\dots & x_n \\ \dots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1}\dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

4. $a_{ij} = \max\{i,j\}$;

5. $a_{ij} = \min\{i,j\}$.

Задача 2 Решить системы уравнений

1. $\begin{cases} 2x+3y+5z &= 10 \\ 3x+7y+4z &= 3 \\ x+2y+2z &= 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x-6y+4z &= 3 \\ 3x-3y+2z &= 2 \\ 4x-5y+2z &= 1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x-3y+z &= 2 \\ 3x-5y+5z &= 3 \\ 5x-8y+6z &= 5 \end{cases}$, $\begin{cases} 5x-6y+z &= 4 \\ 3x-5y-2z &= 3 \\ 2x-y+3z &= 5 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 2ax-23y+29z &= 4 \\ 7x+ay+4z &= 7 \\ 5x+2y+az &= 5 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 0 \\ x_2+x_3+x_5 &= 11 \\ x_1+2x_4+2x_5 &= 12 \end{cases}$.

Задача 3 Докажите, что определитель матрицы A тогда и только тогда равен нулю, когда строки матрицы линейно зависимы.

Определение *Рангом матрицы* называется размерность пространства, порожденного строками этой матрицы.

Определение *Минором* называется любая квадратная подматрица, т.е. выделили произвольные k строк и k столбцов (не обязательно стоящих рядом), и все элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, и являются минором.

Контрольный вопрос Сколько миноров m-ого порядка в матрице $k \times n$?

Задача 4 Докажите, что ранг матрицы равен размеру наибольшего минора, определитель которого отличен от нуля. (Т.е. у всех миноров большего порядка определители равны нулю.)

Задача 5 Докажите, что ранг равен размерности пространства, порожденного столбцами матрицы.

Задача 6 (теорема Кронекера-Капелли) Докажите, что система $AX = B$ совместна (т.е. имеет решение), тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|B)$. Здесь A – матрица порядка $k \times n$, X и B – вектора-столбцы порядка n и k, соответственно, $(A|B)$ – расширенная матрица системы, т.е. матрица, в которой к матрице A приписали столбец B.

Задача 7 Докажите формулу вычисления определителя матрицы разложением по строке.

Определение Пусть в системе $AX = B$ число неизвестных равно числу уравнений ($k = n$) и определитель матрицы A отличен от нуля ($det(A) \neq 0$). Обозначим через Δ_i определитель матрицы A_i, которая получается из матрицы A заменой i-ого столбца на столбец B. Тогда

$$x_i = \frac{\Delta_i}{det(A)}. \tag{1}$$

Формулы 1 называются *Правилом Крамера.*

Задача 8 Докажите, что x_i, полученные по формулам $(*)$, являются корнями системы $AX = B$.

Указание Возьмите x_i, подставьте их в систему, умножьте на $det(A)$ и докажите тождество.

Задача 9 Докажите, что система $AX = 0$ имеет нетривиальное (т.е. не нулевое) решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A строго меньше числа неизвестных. (Эта теорема встречается в самых разных разделах математики! Поэтому советуем обратить на нее особое внимание.)

Задача 10 Докажите, что множество решений системы $AX = 0$, где A — $k \times n$-матрица, образует векторное пространство и его размерность равна $n - \mathrm{rank}(A)$.

Задача 11 Докажите, что $det(AB) = det(A)det(B)$.