Геометрия, семинар 4, 29.9.97

Задача 1 Пусть $A^* = A^{-1}$. Докажите, что $\det A = \pm 1$.

Задача 2 Докажите, что ортогональное преобразование плоскости с единичным определителем есть поворот. Напишите матрицу поворота в ортонормированном базисе на плоскости.

Задача 3 Какой вид имеет матрица (в ортонормированном базисе) произвольного ортогонального преобразования плоскости с определителем -1 ?

Задача 4 Докажите изоморфизм групп $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ и $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Задача 5 Скалярное произведение двух векторов-столбцов задано равенством $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + \frac{1}{3}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + x_2 y_2$. Найдите ортонормированный базис, получающийся процессом Грама из базиса $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача 6 Билинейная форма задана равенством $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$. Докажите, что линейное преобразование $A_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$ сохраняет эту форму. Какую кривую описывает точка $A_t p$, если t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$? (p — произвольная фиксированная точка плоскости).

Задача 7 Докажите, что любое линейное преобразование, сохраняющее форму, заданную в предыдущей задаче, имеет определитель ± 1. Докажите, что всякое такое преобразование с определителем 1 есть A_t для некоторого t.

Задача 8 Придумайте как можно больше (непрерывных) гомоморфизмов групп $S^1 \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^1 \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Задача 9 Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в n-мерном пространстве. Как выглядят в этом базисе матрицы линейных преобразований, сохраняющих:

1. Вектор e_1;

2. Векторы $e_1, \dots, e_k$;

3. Линейное подпространство, натянутое на вектор e_1;

4. Линейное подпространство, натянутое на векторы $e_1, \dots, e_k$;

5. Линейное подпространство, натянутое на векторы $e_1, \dots, e_k$ и линейное подпространство, натянутое на векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$;

6. Флаг подпространств $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \ldots \subset \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$?

Докажите, что соответствующие множества линейных преобразований являются подгруппами $\mathrm{GL}(n)$. Какие из этих подгрупп являются подгруппами других ? Нормальны ли эти подгруппы ? Как можно описать соответствующие множества смежных классов ?

Задача 10 Аффинное преобразование S таково, что $S(a) = (2,5)$, $S(b) = (3,7)$, $S(c) = (0,1)$, где $abcd$ — квадрат. Найдите координаты точки $S(d)$, и вычислите матрицу линейного преобразования $\tilde{S}$.