Геометрия, семинары 5 и 6

**Задача 1** Докажите, что проективная прямая гомеоморфна окружности. Гомеоморфизм это взаимно однозначное отображение, непрерывное вместе со своим обратным.

**Задача 2** Плоскость $x = 1$ проектируется на плоскость $y = 1$ (в $\mathbb{R}^3$) из начала координат. Запишите получающееся проективное преобразование проективной плоскости в однородных координатах.

**Задача 3**

1. Найдите проективное преобразование прямой, переводящее точки 0, 1 и 1/3 в точки 0, 1 и 1/2 соответственно.

2. Докажите, что нельзя построить середину данного отрезка, пользуясь только линейкой без делений.

Образ окружности при аффинном преобразовании называется эллипсом.

**Задача 4**

1. Докажите, что эллипс — центрально симметричная фигура, и что при аффинном преобразовании центр окружности переходит в центр (симметрии) эллипса.

2. Докажите, что существует проективное преобразование, сохраняющее эллипс, но не сохраняющее его центр.

   **Указание** Воспользуйтесь таким фактом (доказывать который необязательно): ограниченное сечение кругового конуса плоскостью есть эллипс.

3. Докажите, что нельзя построить центр данного круга, пользуясь только линейкой без делений.

В следующих двух задачах имеется в виду проективная плоскость и проективные прямые.

**Задача 5** Докажите теорему Дезарга: прямые $aa'$, $bb'$ и $cc'$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых $ab' \cap a'b$, $ac' \cap a'c$ и $bc' \cap b'c$ лежат на одной прямой.

**Указание 1** Переведите проективным преобразованием точки $aa' \cap bb' \cap cc'$ и $ab' \cap a'b$ на бесконечно удаленную прямую.

**Указание 2** Переведите проективным преобразованием точки $a, b, a', b'$ в вершины квадрата.

**Указание 3** Считайте, что треугольники $abc$ и $a'b'c'$ лежат не в одной плоскости, а в двух параллельных плоскостях.

**Задача 6** Докажите теорему Паппа: если точки $a_1, a_2, a_3$ лежат на одной прямой, а точки $b_1, b_2, b_3$ — также на одной прямой, то точки $a_1b_2 \cap a_2b_1$, $a_1c_2 \cap a_2c_1$, $b_1c_2 \cap b_2c_1$ также лежат на одной прямой.

**Задача 7** Сколько точек содержит проективная прямая над полем из 2 элементов? из $p$ элементов? А проективная плоскость ?

**Задача 8** Нарисуйте, как расположены проективные прямые на проективной плоскости над полем из 2 элементов ($\mathbb{F}_2P^2$); над полем из 3 элементов ($\mathbb{F}_3P^2$).

**Задача 9** Выясните, как действует группа $S_4$ перестановок точек $a_1, a_2, a_3, a_4$ на двойное отношение $[a_1, a_2, a_3, a_4]$. При каких значениях двойного отношения орбита действия содержит меньше элементов, чем в случае общего положения ?

**Задача 10** Укажите точки бесконечно удаленной прямой, принадлежащие замыканию окружности $x^2+y^2=1$, гиперболы $x^2-y^2=1$, полукубической параболы $x^2-y^3=0$. Напишите уравнения этих замыканий в однородных координатах.

**Задача 11** Напишите уравнения кривых, проективно двойственных к кривым, указанным в предыдущей задаче.

Точка $x_* \in \mathbb{R}$ называется средним гармоническим точек $x_1, \ldots, x_n$ относительно начала отсчета $a$, если $\frac{n}{x_*-a} = \frac{1}{x_1-a} + \ldots + \frac{1}{x_n-a}$.

**Задача 12** Докажите, что точка $x_*$ является средним гармоническим точек $x_1, \ldots, x_n$ относительно начала отсчета $a$ тогда и только тогда, когда для любого $t$ выполнено равенство $[x_1, x_*, t, a] + \ldots + [x_n, x_*, t, a] = n$.

**Задача 13** Докажите теорему Коутса: пусть прямая, вращающаяся вокруг начала координат, пересекает кривую степени $n$ в $n$ точках $x_1, \ldots, x_n$. Тогда среднее гармоническое точек $x_1, \ldots, x_n$ движется по некоторой прямой (считается, что начало координат не лежит на кривой).