ГЕОМЕТРИЯ, 1-ый курс, семинар 9.

3 ноября 1997 г.

Задача 1 Нарисуйте на плоскости образ координатной сетки при преобразовании
а) $z \mapsto 2z$; б) $z \mapsto (1+i)z$; в) $z \mapsto az+b$ при произвольных $a, b \in \mathbb{C}$; г) $z \mapsto 1/z$; д) $z \mapsto z^2$.

Задача 2 Докажите, что множество $\{z \mid \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}\}$ представляет собой прямую ab (без точки b), а множество $\{z \mid \frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}\}$ — окружность с диаметром ab.

Указание Аргумент числа $\frac{z-a}{z-b}$ равен $\pi - \angle azb$.

Задача 3 Докажите (воспользовавшись указанием к предыдущей задаче), что 4 точки $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ вещественно. Во что переходит это утверждение, если $d = \infty$?

Задача 4 Докажите, что дробно-линейное преобразование $z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ произвольные) переводит окружности и прямые в окружности и прямые.

Задача 5 Докажите, что свойством, указанным в задаче 4, обладают только дробно-линейные преобразования и сопряженные к ним.

Указание Применив дробно-линейное преобразование, можно добиться, чтобы точка ∞ переходила в себя.

Задача 6 Докажите, что дробно-линейное преобразование $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ переводит единичный круг в верхнюю полуплоскость.

Задача 7 При каких условиях на коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ дробно-линейное преобразование переводит верхнюю полуплоскость в себя ?

Задача 8 Докажите, что любое дробно-линейное преобразование есть композиция аффинных и $z \mapsto \frac{1}{z}$. Докажите, что при композиции дробно-линейных преобразований их матрицы перемножаются.

Задача 9 Докажите, что дробно-линейные преобразования сохраняют углы (между прямыми и окружностями).

Указание Для решения этой задачи полезно уметь дифференцировать ...

Определение Точки z и z^* называются инверсными относительно окружности с центром в точке a и радиуса R, если $(z-a)\overline{(z-a^*)} = R^2$.

Задача 10 Докажите, что если точки z и z^* инверсны относительно некоторой окружности, то их образы при дробно-линейном преобразовании инверсны относительно образа этой окружности. Что происходит в случае, когда окружность переходит в прямую ?

Задача 11 Докажите, для любых двух троек различных точек z_0, z_1, z_∞ и w_0, w_1, w_∞ существует единственное дробно-линейное отображение, переводящее $z_i \to w_i$. Выведите из этого еще одно решение задачи 3.