Математический Колледж НМУ **1 семестр**

Экзамен по геометрии, вариант 1.
7 декабря 1997 г.

Задача 1 Найти расстояние от точки с координатами $(1, 2, 0)$ до плоскости, заданной в $\mathbb{R}^3$ уравнением $3x - y + 2z = 4$. Базис, по отношению к которому заданы координаты — ортонормированный.

Задача 2 Найти квадратичную форму, относительно которой оператор $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ является самосопряженным. Доказать, что для оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ такой квадратичной формы не существует.

Задача 3 Доказать, что множество всех гипербол на плоскости обладает структурой многообразия, и определить его размерность.

Задача 4 Доказать, что пересечение групп $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ и $\mathrm{PGL}(1, \mathbb{C})$ (рассматриваемых как группы не всюду определенных преобразований плоскости) состоит в точности из всех движений плоскости.

Задача 5 Вершины тетраэдра в пространстве Лобачевского лежат на абсолюте. Доказать, что противоположные двугранные углы его равны.

Математический Колледж НМУ **1 семестр**

Экзамен по геометрии, вариант 2.
7 декабря 1997 г.

Задача 1 Плоскости α, β и γ заданы в $\mathbb{R}^3$ уравнениями $3x-y+2z = 4$, $2x+3y-z = 1$ и $y = 0$. Найти угол между плоскостью α и прямой $\beta \cap \gamma$. Базис, по отношению к которому заданы координаты — ортонормированный.

Задача 2 Найти квадратичную форму, относительно которой оператор $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ является самосопряженным. Доказать, что для оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ такой квадратичной формы не существует.

Задача 3 Доказать, что множество всех парабол на плоскости обладает структурой многообразия, и определить его размерность.

Задача 4 Доказать, что подгруппа группы $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$, состоящая из преобразований, сохраняющих заданную точку, изоморфна группе $\mathrm{Aff}(2)$.

Задача 5 Вершины тетраэдра в пространстве Лобачевского лежат на абсолюте. Доказать, что сумма величин его двугранных углов, примыкающих к каждой вершине, равна π.