Образцы задач зачета по геометрии

Студентам предлагался 1 теоретический вопрос и либо тема для исследования, либо несколько задач.

ТЕМЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Точка $x_* \in \mathbb{C}$ называется средним гармоническим точек $x_1, \ldots, x_n$ относительно начала отсчета a, если $\frac{n}{x_*-a} = \frac{1}{x_1-a} + \ldots + \frac{1}{x_n-a}$. Пусть Q — квадрика в $\mathbb{C}P^2$; рассмотрим для каждой прямой, проходящей через a, среднее гармоническое точек пересечения этой прямой с Q. Доказать, что эти средние гармонические лежат на одной прямой (называемой полярой a относительно Q). Доказать, что если Q задается уравнением $x^2+y^2+z^2=0$, то поляра есть прямая, проективно двойственная точке a. Доказать, что если ax и ay — касательные к Q (причем $x, y \in Q$), то поляра есть прямая xy. Доказать, что если Q состоит из пересекающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2, а две прямые, проходящие через a, пересекают ℓ_1 и ℓ_2 в точках p_1, q_1 и p_2, q_2 соответственно, то точка $x = p_1q_2 \cap p_2q_1$ лежит на поляре a относительно Q. Найти рецепт построения поляры к точке относительно эллипса в вещественном случае. Доказать, что поляра точки a по отношению к квадрике $(Ax, x) = 0$ задается уравнением $(Aa, x) = 0$.

2. Сопряженные диаметры квадрик: существование; если aa' и bb' сопряжены (в эллипсе), то S_{abo} и oa^2+ob^2 не зависит от выбора пары сопряженных диаметров. Найти аналоги этих утверждений для гиперболы. Какую кривую описывает центр эллипса, касающегося прямого угла ?

3. Докажите, что все квадрики $x^2/(a-\lambda) + y^2/(b-\lambda) = 1$ софокусны, и наоборот. Докажите, что через каждую точку плоскости, не лежащую на осях координат, проходят ровно 2 ортогональных друг другу квадрики данного семейства. Сформулируйте и докажите n-мерный аналог этой теоремы.

4. Построение "сферической геометрии" по образцу геометрии Лобачевского: доказать, что аффинная группа изоморфна $\mathrm{O}(3)$; доказать существование и единственность аффинно инвариантной метрики и

выписать явную формулу для нее в координатах “широта – долгота”. Выразить площадь сферического треугольника через дефект.

5. Построить модель “прямой Лобачевского” в интервале $(-1, 1)$, исходя из модели плоскости в круге $|z| < 1$. Описать $\mathrm{Aff}_L(1)$.

6. Пусть A – множество положительно определенных квадратичных форм с определителем 1. На это множестве естественно действует группа $SL(2, \mathbb{R})$. Доказать, что это модель плоскости Лобачевского. Найти инвариантное расстояние (выразить через инварианты форм).

7. Найти аффинную группу плоскости Лобачевского в модели Клейна. Связать с моделью на гиперболоиде и с моделью Пуанкаре в круге.

ЗАДАЧИ

1. Найти расстояние от точки n-мерного пространства до гиперплоскости в этом пространстве, если точка задана координатами, а гиперплоскость — уравнением.

2. На какие отрезки делят диагональ n-мерного куба проекции его вершин ?

3. Вокруг данного эллипсоида описываются всевозможные прямоугольные параллелепипеды. Доказать, что диагонали всех этих параллелепипедов равны.

4. $\det^2(x_{ij}) \leq \prod_i \left(\sum_i x_{ij}^2\right)$.

5. Найти угол между двумя гранями правильного n-мерного симплекса; объем этого симплекса; группу самосовмещений этого симплекса.

6. Фокальное и оптическое свойства квадрик на плоскости.

7. Доказать, что через любую точку невырожденной квадрики в $\mathbb{C}P^3$ можно провести две прямых, лежащих целиком на этой квадрике. Когда (для каких квадрик) это верно в вещественном случае ?

8. Одна окружность лежит внутри другой. Доказать, что существует инверсия, переводящая окружности в концентрические. Поризм Понселе.

9. Сфера стереографически проектируется на плоскость и при этом может вращаться вокруг неподвижного центра. Возникают отображения плоскости в себя. Доказать, что это — дробно-линейные преобразования.

10. Найти все дробно-линейные преобразования, отображающие единичный круг $|z| < 1$ на себя.

11. Если две касательные к окружности в точках z_1 и z_2 пересекаются в точке z, то z — среднее гармоническое z_1 и z_2.

12. Касательная к эллипсу $x^2/a+y^2/b=z^2$, проведенная из точки $(1,\pm i,0)$, проходит через его фокус (все комплексное и проективное).

13. Доказать, что лучи $z=te^{i\varphi}$, $t\geq 1, \varphi=\mathrm{fixe}$ переводятся отображением $w=\frac{1}{2}(z+1/z)$ в семейство софокусных гипербол, а ортогональные им окружности $z=te^{i\varphi}$, $t=\mathrm{fixe}\geq 1$ — в софокусные эллипсы.

14. Пусть a_1,a_2 — точки пересечения прямых $\ell_2,\ell_2\subset \mathbb{R}P^2\subset \mathbb{C}P^2$ с бесконечно удаленной прямой; $b_+=(1,i,0)$, $b_-=(1,-i,0)\in \mathbb{C}P^2$ лежат на этой прямой. Доказать, что двойное отношение $[a_1,a_2,b_+,b_-]=e^{2i\alpha}$, где α — угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2.

15. Доказать, что линейной заменой переменных нельзя преобразовать многочлен $xy(x+y)(x-y)$ в многочлен $(x-y)(x-2y)(x-3y)(x-4y)$.

16. Найти группы аффинных самосовмещений треугольника в $\mathbb{R}^2$, четырехугольника в $\mathbb{R}^2$; треугольника на плоскости Лобачевского. Найти группу проективных самосовмещений четырехугольника в $\mathbb{R}^2$; пятиугольника в $\mathbb{R}^2$.

17. Аффинная и проективная классификация квадрик. Может ли квадрика быть эквивалентна кривой 3 порядка ?

18. Сферическая теоремы синусов $\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}$. Гиперболическая теорема синусов: $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{sh}\, a}=\frac{\sin\beta}{\mathrm{sh}\, b}=\frac{\sin\gamma}{\mathrm{sh}\, c}$.

19. Какие из утверждений верны в геометрии Лобачевского: биссектриса угла равноудалена от его сторон, около любого треугольника можно описать и в любой треугольник можно вписать окружность, высоты пересекаются в одной точке.