Члены нулевого порядка по ε в правой части уравнений (3.37) сокращаются, вторым и всеми дальнейшими порядками по ε мы пренебрегаем и поэтому получаем, что функции θ_i удовлетворяют уравнениям

$$\partial_1\theta_1 = \left(e^{-i\pi/4}\frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{m}{2}\right)\bar{\theta}_1 + \frac{m}{2}\theta_2,$$
$$\partial_2\theta_1 = \left(e^{i\pi/4}\frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{im}{2}\right)\bar{\theta}_1 - \frac{im}{2}\theta_2.$$

Положив $\partial = \partial_1 - i\partial_2$, $\bar{\partial} = \partial_1 + i\partial_2$, приходим к системе

$$\bar{\partial}\theta_1 = m\theta_2,$$
$$\partial\theta_1 = -im\bar{\theta}_1,$$

или, дифференцируя еще раз,

$$\partial\bar{\partial} = m\partial\theta_2,$$
$$\bar{\partial}\partial\theta_1 = -im\bar{\partial}\bar{\theta}_1.$$

Следовательно, $\partial\theta_1 = -i\bar{\partial}\bar{\theta}_2$, и мы получаем, что θ_i удовлетворяют двухкомпонентным уравнениям Дирака

$$\partial\theta_2 = m\theta_1, \qquad \bar{\partial}\theta_1 = m\theta_2,$$

а параметр m играет роль массы частицы, описываемой этими уравнениями.

3. Вершинные модели

Модель Изинга как вершинная модель

Следующий способ представления трансфер-матрицы и, следовательно, вычисления статистической суммы будет основан на трактовке модели Изинга как вершинной модели. При этом подходе основной механизм вычисления статсуммы связан с существованием большого количества коммутирующих с трансфер-матрицей операторов, то есть интегралов движения. Метод нахождения этих интегралов движения, которым мы воспользуемся, был предложен Бакстером.

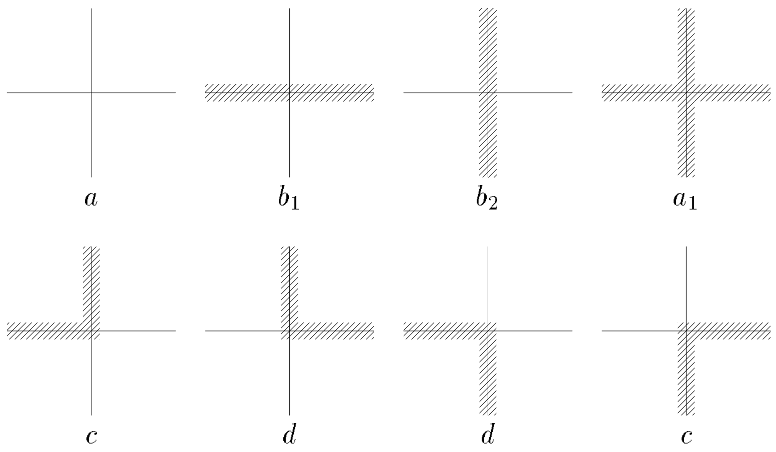

Рис. 3.18.

Рассмотрим модель Изинга на решетке $n \times m$ с тороидальными граничными условиями. Здесь n — число узлов в строке, а m — число узлов в столбце. Введем анизотропию, то есть будем считать, что горизонтальная и вертикальная константы взаимодействия различны: $K_{\text{hor}} = K_1$, $K_{\text{vert}} = K_2$.

Ранее было введено низкотемпературное разложение для изотропной модели Изинга. Абсолютно аналогично можно вывести формулу для низкотемпературного разложения статсуммы и в анизотропном случае. Она имеет следующий вид:

$$Z \sim \sum_{C} \exp\left\{-2K_1\Delta_1 - 2K_2\Delta_2\right\}, \tag{3.38}$$

где суммирование выполняется по всевозможным замкнутым контурам на дуальной решетке, а Δ_1, Δ_2 — число горизонтальных и вертикальных линий соответственно.

Каждому контуру на дуальной решетке поставим в соответствие совокупность состояний ребер всей решетки: если контур не проходит по данному ребру, будем закрашивать его в белый цвет, если же проходит, то черным. Белым ребрам сопоставим знак «плюс», черным — «минус».

Очевидно, что к каждому узлу подходит четное число плюсов и четное число минусов. Поэтому возможен не всякий вариант вершины, а только представленные на рис. 3.18.

Сделаем теперь следующий шаг и для каждой конфигурации ребер ее вклад в статсумму представим в виде произведения некоторых чисел, расположенных в узлах решетки, называемых *локальными вершинными весами* и зависящих только от состояний четырех ребер, входящих в узел. Для этого заметим, что в зависимости от состояния ребра, его вклад в статсумму (локальный вес ребра) может быть одним из изображенных на рис. 3.19.

Локальный вес вершины равен, по определению, корню из произведения локальных весов ребер, входящих в нее. Тогда для вершин на рис. 3.18:

$$a = 1, \qquad a_1 = e^{-2K_1-2K_2}, \qquad b_1 = e^{-2K_1},$$
$$b_2 = e^{-2K_2}, \qquad c = e^{-K_1-K_2}, \qquad d = e^{-K_1-K_2}.$$

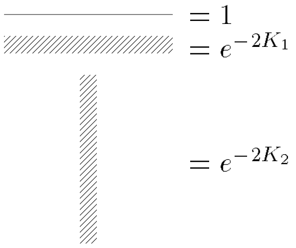

Рис. 3.19.

Из локальных вершинных весов можно составить матрицу 4×4, элементы которой маркируются состояниями четырех ребер, входящих в вершину.

Легко видеть, что

$$R^{++}_{++} = a, \qquad R^{--}_{--} = a_1,$$
$$R^{+-}_{+-} = b_1, \qquad R^{-+}_{-+} = b_2,$$
$$R^{-+}_{+-} = R^{+-}_{-+} = c, \qquad R^{--}_{++} = R^{++}_{--} = d.$$

При повороте вершины с входящими в нее ребрами как целого на 90 градусов, как легко видеть, вес изменяется. Поэтому удобно ввести ориентацию вершины. На рисунках она изображается уголком (рис. 3.20).

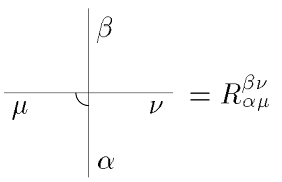

Рис. 3.20.

Тогда статистический вес всей конфигурации можно представить в виде

$$\prod_x R_{\alpha_x\mu_x}, \beta_x\nu_x,$$

откуда статсумма:

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\alpha_x,\beta_x,\mu_x,\nu_x} \prod_x R^{\beta_x\nu_x}_{\alpha_x\mu_x}, \qquad (3.39)$$

Рис. 3.21.

где суммирование ведется по всевозможным конфигурациям ребер, а под знаком произведения стоят локальные вершинные веса.

Все это позволяет сформулировать понятие *вершинной модели*.

Определение. Рассмотрим решетку $n \times m$, где n — число узлов в строке, а m — число узлов в столбце (предполагаются тороидальные граничные условия). Будем приписывать состояния ± 1 не узлам, а ребрам решетки и обозначать эти переменные греческими буквами α, β, μ, ν. Это означает, что любое ребро окрашено либо в черный цвет (состояние -1), либо в белый (состояние $+1$). Для каждого узла решетки возможны, вообще говоря, 16 различных состояний четырех ребер, входящих в этот узел (см. рис. 3.21).

С каждым узлом x и состояниями α, β, μ, ν ее ребер связан вершинный вес $R_x(\alpha, \beta, \mu, \nu)$ (рис. 3.20).

Число ненулевых чисел среди $R_x(\alpha, \beta, \mu, \nu)$ обычно фигурирует в названиях: 8-ми вершинная модель или 6-ти вершинная модель. Статсумма вершинной модели определяется как

$$Z = \sum_{\{\alpha\}} \left(\prod_x R_x(\alpha, \beta, \mu, \nu) \right), \tag{3.40}$$

где суммирование производится по всем конфигурациям ребер $\{\alpha\}$, а произведение берется по всем узлам x.

Следующий шаг является решающим для судьбы вершинных моделей. Рассмотрим две соседние вершины x_1 и x_2, например, как на рис. 3.22. В сумме (3.40) им соответствуют слагаемые

$$Z = \ldots \sum_{\nu} \prod \ldots R_{x_1}(\alpha_1 \beta_1 \mu \nu) R_{x_2}(\alpha_2 \beta_2 \nu \lambda) \ldots .$$

Такое произведение напоминает произведение матриц и позволяет надеяться на построение трансфер-матрицы.

Определим 4×4 матрицу R, элементы которой нумеруются состояниями ребер α, β, μ, ν и равны весу вершины при заданном состоянии

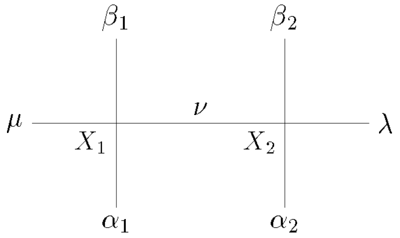

Рис. 3.22.

ребер, входящих в нее, то есть

$$R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} = R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(x) = R_x(\alpha, \beta, \mu, \nu).$$

Матрицу R можно рассматривать как матрицу линейного преобразования R из тензорного произведения двух двумерных пространств в тензорное произведение двух таких же пространств:

$$R : H(\alpha) \otimes H(\mu) \to H(\beta) \otimes H(\nu),$$

где $H(\ldots) = \mathbf{C}^2$ — конфигурационное пространство, отвечающее одному ребру. В скобках указаны переменные, значения которых задают стандартный базис в пространствах H. Его мы будем обозначать, как и раньше, $\{\uparrow, \downarrow\}$ или $\{1, -1\}$ или $\{+, -\}$. Все вышесказанное можно изобразить графически (рис. 3.20).

Статсумма вершинной модели равна

$$Z = \sum_{\{\alpha\}} W(\{\alpha\}),$$

где $W(\{\alpha\}) = \prod\limits_x R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}$ — вес конфигурации ребер $\{\alpha\}$.

Теперь можно определить трансфер-матрицу $T = T_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ как матрицу оператора

$$T : H(\alpha_1) \otimes \ldots \otimes H(\alpha_n) \to H(\beta_1) \otimes \ldots \otimes H(\beta_n).$$

Элемент матрицы T равен (рис. 3.23)

$$T_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} = \sum_{\vec{\nu}} \prod R_{\alpha_1\nu_1}^{\beta_1\nu_2} R_{\alpha_2\nu_2}^{\beta_2\nu_3} \ldots R_{\alpha_n\nu_n}^{\beta_n\nu_1}.$$

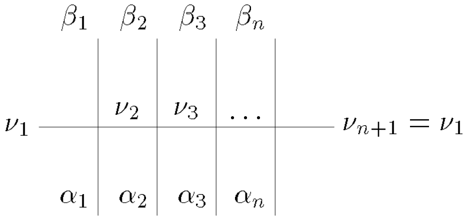

Рис. 3.23.

Тогда

$$Z = \mathrm{Tr}\, T^m,$$

и вычисление статсуммы свелось к задаче на нахождение собственных значений оператора T:

$$T\psi_i = \Lambda_i \psi_i, \qquad Z = \sum_{i=1}^{2^n} \Lambda_i^m.$$

Выпишем матрицу оператора R в базисе $v_i \otimes v_j = \{+\otimes +, -\otimes +, +\otimes -, -\otimes -\}$:

$$R_{\alpha\mu}^{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & e^{-K_1-K_2} \\ 0 & e^{-2K_1} & e^{-K_1-K_2} & 0 \\ 0 & e^{-K_1-K_2} & e^{-2K_2} & 0 \\ e^{-K_1-K_2} & 0 & 0 & e^{-2K_1-2K_2} \end{pmatrix}$$

Вес конфигурации равен произведению весов всех ребер:

$$\prod_x R(x). \tag{3.41}$$

Таким образом, модель Изинга является восьмивершинной моделью.

Квадрат модели Изинга как вершинная модель

Раскрасим поля решетки в шахматном порядке. Будем считать, что наша система распалась на две подрешетки — черную и белую. В центрах черных полей поместим частицы со спинами σ_i', а в центрах белых полей — частицы со спинами σ_i. σ_i взаимодействуют между собой по диагонали, аналогично ведут себя и σ_i'.

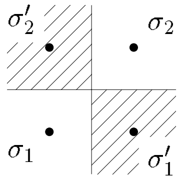

Рис. 3.24.

Определим теперь вершинный вес. Каждый узел x окружен двумя черными и двумя белыми полями (рис. 3.24). Тогда

$$V_x = V(\sigma_1, \sigma_1', \sigma_2, \sigma_2') = e^{K_1\sigma_1'\sigma_2' + K_2\sigma_1\sigma_2},$$

так что

$$Z^2_{\text{Ising}} = \sum_{\sigma}\sum_{\sigma'}\prod V_x.$$

Вес вершины можно выразить через переменные на ребрах (рис. 3.25):

$$\mu = \sigma_1\sigma_2'; \qquad \nu = \sigma_2\sigma_1'; \qquad \alpha = \sigma_1\sigma_1'; \qquad \beta = \sigma_2\sigma_2'. \tag{3.42}$$

Откуда

$$\sigma_2 = (\mu\beta)\sigma_1; \qquad \sigma_2 = (\nu\alpha)\sigma_1; \qquad \sigma_2' = (\mu\alpha)\sigma_1'; \qquad \sigma_2' = (\nu\beta)\sigma_1'.$$

Для совместности системы необходимо, чтобы было

$$\alpha\beta\mu\nu = 1. \tag{3.43}$$

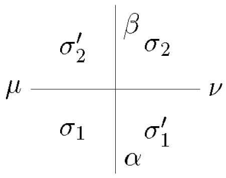

Рис. 3.25.

Наоборот, пусть переменные α, β, μ, ν удовлетворяют условию $\alpha\beta\mu\nu = 1$. Тогда если задать спин на какой-то одной (произвольной) грани и значения переменных на ребрах, то при помощи соотношений (3.42) все остальные спины определяются однозначно.

Таким образом, любому состоянию спинов на гранях соответствует одна конфигурация переменных на ребрах, в то время как каждой конфигурации $\{\alpha, \beta, \mu, \nu\}$ соответствуют два различных состояния граней, отличающиеся друг от друга переворотом всех спинов.

Локальные вершинные веса для такой модели приведены на рис. 3.26.

Модель льда на квадратной решетке

Рассмотрим модель на квадратной решетке, в которой переменные на ребрах принимают два значения ($+1$ и -1), а ненулевыми являются

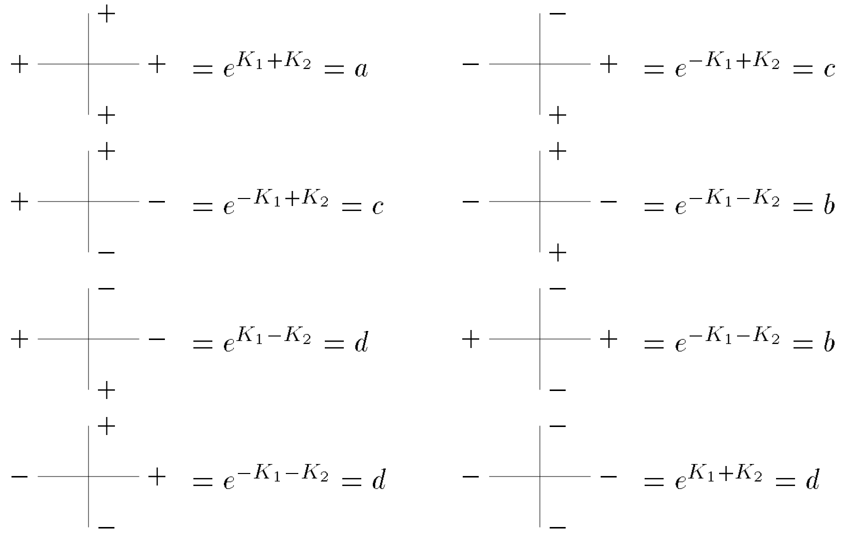

Рис. 3.26.

только шесть или восемь состояний вершин (вершинных весов). Значения вершинных весов обычно обозначаются a, b, c, d (см. рис. 3.27).

Мотивацией названия данной модели является представление модели как модели несуществующего в природе объекта — двумерного льда.

Рассмотрим квадратную решетку (см. рис. 3.28), в вершинах которой находятся атомы кислорода. Водород находится на ребрах, но не в центре ребра, а вблизи одного из двух атомов кислорода. Стрелки

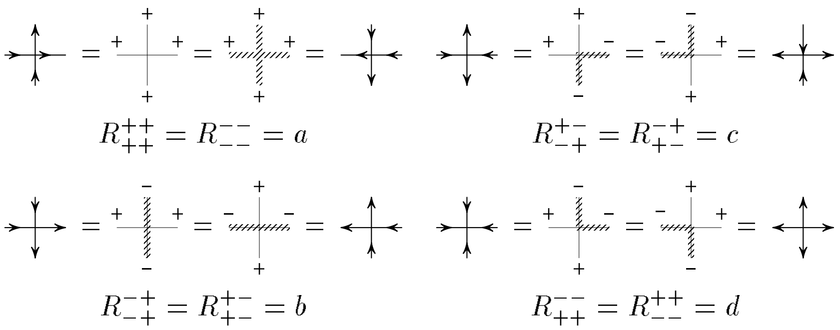

Рис. 3.27.

на рис. 3.29 указывают направление смещения атомов водорода. На рис. 3.29 показано, кроме того, соответствие между расположениями атомов водорода и состояниями модели (одна из конфигураций). Состояния с $d \neq 0$ запрещены — валентность кислорода в них оказывается равной 0 или 4.

Так определенная модель называется *шестивершинной моделью*, или *моделью льда*.

Если же вершинный вес $d \neq 0$, то модель носит название *восьмивершинной*.

В базисе $v_i \otimes v_j = \{+\otimes +, -\otimes +, +\otimes -, -\otimes -\}$ R-матрица восьмивершинной модели имеет вид:

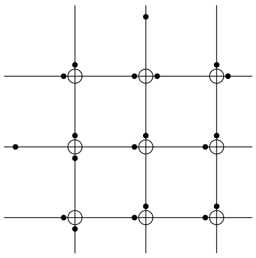

Рис. 3.28.

$$R^{\beta\nu}_{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Обобщением предыдущих рассмотрений являются вершинные модели, в которых α, β, μ, ν принимают n разных значений, а статсумма вычисляется аналогичным образом.

Вершинные модели. Уравнения Янга-Бакстера

Рассмотрим вершинную модель общего вида. Введем для нее трансфер-матрицу T (рис. 3.23):

$$T^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}} = T^{\beta_1 \ldots \beta_n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = R^{\beta_1\nu_2}_{\alpha_1\nu_1} R^{\beta_2\nu_3}_{\alpha_2\nu_2} \ldots R^{\beta_n\nu_1}_{\alpha_n\nu_n}. \tag{3.44}$$

Здесь по повторяющимся индексам (в данном случае это ν_i) производится суммирование. Как всегда, наша задача состоит в том, чтобы найти собственные векторы и собственные значения трансфер-матрицы.

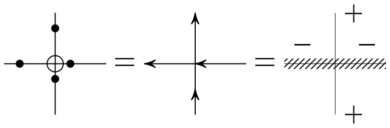

Рис. 3.29.

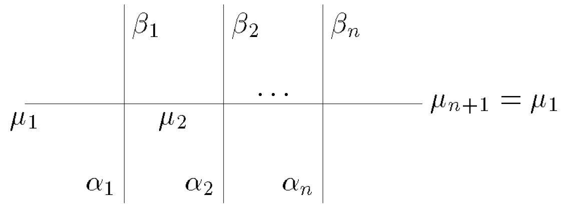

Рис. 3.30.

Попытаемся найти семейство матриц $\tilde{T}$, коммутирующих с нашей трансфер-матрицей.

Будем искать $\tilde{T}$ в локальном виде, аналогичном виду T (рис. 3.30):

$$\tilde{T}_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} = \tilde{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \dots \beta_n} = \tilde{R}_{\alpha_1 \mu_1}^{\beta_1 \mu_2} \tilde{R}_{\alpha_2 \mu_2}^{\beta_2 \mu_3} \dots \tilde{R}_{\alpha_n \mu_n}^{\beta_n \mu_1}.$$

Оператор $T\tilde{T}$, как и оператор $\tilde{T}T$, можно изобразить графически (рис. 3.31).

Удобно ввести матрицы S_α^β и $\tilde{S}_\alpha^\beta$, определяемые через матричные элементы (рис. 3.32):

$$(S_\alpha^\beta)_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} = \tilde{R}_{\alpha \mu_1}^{\gamma \nu_1} R_{\gamma \mu_2}^{\beta \nu_2}, \qquad (\tilde{S}_\alpha^\beta)_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} = R_{\alpha \mu_1}^{\gamma \nu_1} \tilde{R}_{\gamma \mu_2}^{\beta \nu_2}.$$

Тогда матрицы $T\tilde{T}, \tilde{T}T$ запишутся следующим образом:

$$T\tilde{T} = \operatorname{Tr} S_{\alpha_1}^{\beta_1} S_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots S_{\alpha_n}^{\beta_n}, \qquad \tilde{T}T = \operatorname{Tr} \tilde{S}_{\alpha_1}^{\beta_1} \tilde{S}_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots \tilde{S}_{\alpha_n}^{\beta_n}.$$

Идея Бакстера состоит в том, что условие $T\tilde{T} = \tilde{T}T$ будет выполнено, если существует матрица M, такая что для любых α, β

$$S_\alpha^\beta = M \tilde{S}_\alpha^\beta M^{-1},$$

или, что то же самое,

$$M \tilde{S}_\alpha^\beta = S_\alpha^\beta M.$$

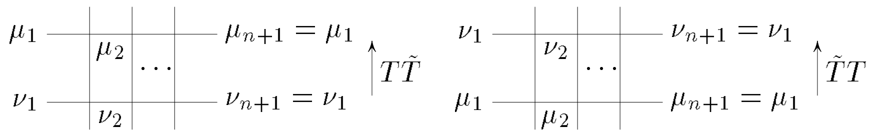

Рис. 3.31.

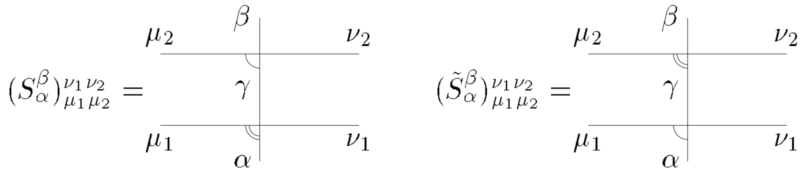

Рис. 3.32.

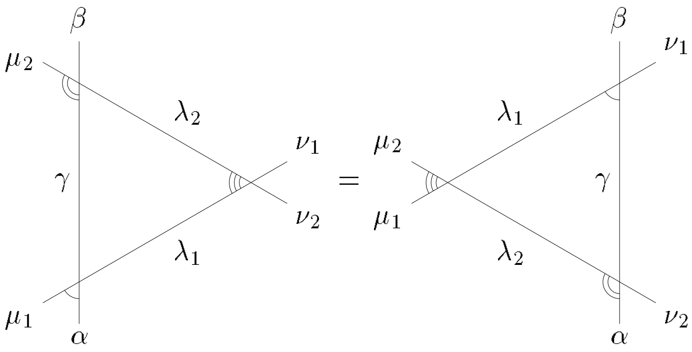

Рис. 3.33.

Это равенство можно переписать в виде

$$\tilde R^{\beta\lambda_2}_{\gamma\mu_2} R^{\gamma\lambda_1}_{\alpha\mu_1} M^{\mu_1\mu_2}_{\lambda_1\lambda_2} = M^{\lambda_1\lambda_2}_{\mu_1\mu_2} R^{\beta\nu_1}_{\gamma\lambda_1} \tilde R^{\gamma\nu_2}_{\alpha\lambda_2}. \tag{3.45}$$

Уравнения (3.45) называются *уравнениями Янга—Бакстера (YB)* или *уравнениями треугольника*. Графически их изображают как на рис. 3.33.

В системе (3.45) число уравнений определяется числом способов расстановки $+$ и — на внешних концах. Получается система из 64 уравнений с 16 неизвестными. Неизвестными являются элементы матрицы M.

Замечание. Часто приходится рассматривать тензорное произведение вида $H_{j_1} \otimes H_{j_2} \otimes \ldots \otimes H_{j_n}$ нескольких копий пространства $H = (\mathbf{C})^2$, упорядоченных каким-то образом. В этом случае удобно обозначать через R_{jk} $(j \neq k)$ оператор, действующий на H_j и H_k как R, а на других пространствах — как тождественное отображение. Например, на произведении $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$ имеем

$$R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes \mathrm{id}, \qquad R^{23} = \sum_i \mathrm{id} \otimes a_i \otimes b_i,$$

если $R = \sum_i a_i \otimes b_i$, где $a_i, b_i \in \mathrm{End}(V)$. Тогда уравнения Янга-Бакстера можно переписать как

$$R^{23}\tilde{R}^{13}M^{12} = M^{12}\tilde{R}^{13}R^{23}. \tag{3.46}$$

Действительно, отождествив во-первых пространства $H(\alpha)$, $H(\beta)$, $H(\gamma)$, во-вторых пространства $H(\mu_1)$, $H(\nu_1)$, $H(\lambda_1)$, и в-третьих пространства $H(\mu_2)$, $H(\nu_2)$, $H(\lambda_2)$, то есть считая, что все пространства, отвечающие одной прямой, тождественны, мы получим (3.46).

Уравнения Янга-Бакстера для модели льда

Большая часть дальнейшего материала так или иначе связана с уравнениями Янга-Бакстера. Поэтому разберем очень важный пример — модель льда. Напомним, что в этой модели только шесть элементов R-матрицы отличны от нуля. Эти коэффициенты попарно равны и обозначаются a, b, c.

Предположим, что матрицы R, $\tilde{R}$ и $M = \hat{R}$ имеют одинаковый вид, но соответствуют разным значениям параметров:

$$R \to a, b, c; \qquad \tilde{R} \to a', b', c'; \qquad \hat{R} \to a'', b'', c''.$$

Если числа a, b, c заданы, то a', b', c' и a'', b'', c'' находятся в нашем распоряжении. Поскольку уравнения однородны относительно R, $\tilde{R}$ и $\hat{R}$, то остается только четыре параметра, подлежащих определению.

К счастью, возникает много упрощений. Во-первых, нетрудно заметить, что $R^{\beta\nu}_{\alpha\mu} \neq 0$, только если выполняется условие $\alpha + \mu = \beta + \nu$. То же самое справедливо по отношению к $\tilde{R}$ и $\hat{R}$. Отсюда следует, что обе части уравнения Янга-Бакстера равны нулю, если не выполняется условие $\alpha + \mu_1 + \mu_2 = \beta + \nu_1 + \nu_2$. В результате остается только 20 уравнений. Кроме того, обращение знаков всех спинов не меняет R, $\tilde{R}$, $\hat{R}$ и уравнения YB. Поэтому эти 20 уравнений сводятся к 10 уравнениям.

Выписав эти десять уравнений, легко увидеть, что на самом деле четыре из них выполняются тождественно, а остальные образуют три пары эквивалентных уравнений.

Таким образом, в системе YB останется только три уравнения. Первое из них имеет вид

$$ac'a'' = bc'b'' + ca'c''$$

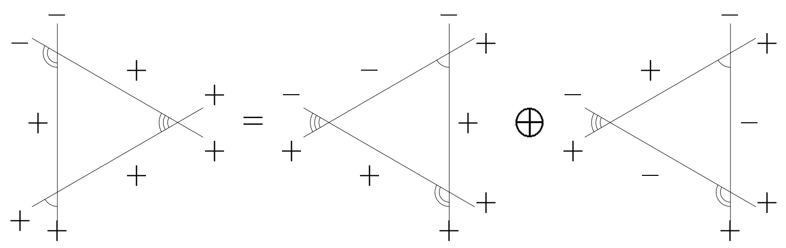

Рис. 3.34.

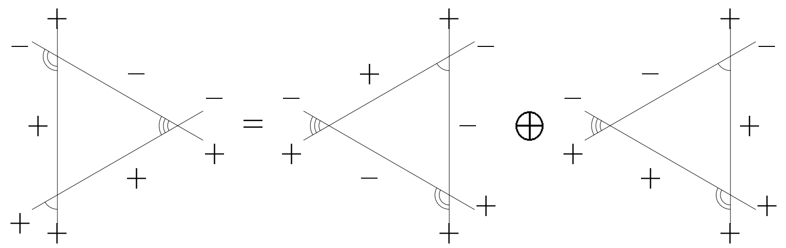

Рис. 3.35.

и соответствует расстановке $+$ и $-$, показанной на рис. 3.34.

Второе уравнение YB имеет вид

$$ab'c'' = cc'b'' + ba'c''$$

и соответствует рис 3.35.

Третье уравнение имеет вид

$$cb'a'' = ca'b'' + bc'c''$$

и соответствует рис. 3.36.

Рассмотрим эти три уравнения как систему однородных линейных уравнений с неизвестными a'', b'', c''. Собственно говоря, нам не нужно находить матрицу оператора $\hat{R}{=}M$. Важно только знать, что такая существует.

Выпишем еще раз систему уравнений Янга-Бакстера:

$$\begin{cases} ac'a'' = bc'b'' + ca'c'', \\ ab'c'' = cc'b'' + ba'c'', \\ cb'a'' = ca'b'' + bc'c''. \end{cases} \tag{3.47}$$

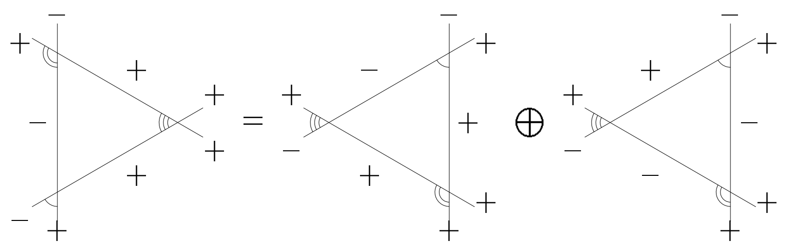

Рис. 3.36.

Ненулевое решение (3.47) существует, если определитель системы обращается в нуль. Это условие эквивалентно равенству

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab} = \frac{(a')^2+(b')^2-(c')^2}{a'b'}. \tag{3.48}$$

Рассматривая систему (3.47) как систему уравнений с неизвестными a', b', c', получаем аналогичное условие:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab} = \frac{(a'')^2+(b'')^2-(c'')^2}{a''b''}. \tag{3.49}$$

Обозначим через $\Delta(a,b,c)$ величину $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}$. Тогда из (3.48) и (3.49) видно, что все наборы ненулевых троек a, b, c с фиксированным Δ, удовлетворяющих (3.47), лежат на конусе

$$x^2+y^2-z^2=\Delta\cdot xy.$$

Оказывается очень удобным выбрать на этом конусе такую параметризацию $\{\rho, u, \eta\}$, чтобы Δ не зависела от ρ и u:

$$\left\{\begin{array}{l} a=\rho\,\mathrm{sh}(\eta+u), \\ b=\rho\,\mathrm{sh}\,u,\, c=\rho\,\mathrm{sh}\,\eta. \end{array}\right. \tag{3.50}$$

Тогда, как легко видеть, $\Delta = 2\ \mathrm{ch}\,\eta$.

Параметр u называется *спектральным параметром*. Наличие нетривиального решения уравнений Янга-Бакстера означает коммутативность матриц T и $\tilde{T}$. Отсюда мы делаем вывод, что эти две матрицы коммутируют тогда и только тогда, когда тройки $\{a,b,c\}$ и

$\{a', b', c'\}$, соответствующие им, характеризуются одним и тем же значением параметра η (спектральный же параметр u и нормировочный ρ могут быть разными):

$$\begin{array}{ll} a = \rho \operatorname{sh}(\eta + u) & a' = \rho' \operatorname{sh}(\eta + u') \\ b = \rho \operatorname{sh} u & b' = \rho' \operatorname{sh} u' \\ c = \rho \operatorname{sh} \eta & c' = \rho' \operatorname{sh} \eta \end{array} \tag{3.51}$$

Кроме того, как видно из (3.49), тройку $\{a'', b'', c''\}$ можно запараметризовать аналогичным образом:

$$\begin{cases} a'' = \rho'' \operatorname{sh}(\eta + u''), \\ b'' = \rho'' \operatorname{sh} u'', \\ c'' = \rho'' \operatorname{sh} \eta. \end{cases} \tag{3.52}$$

Возникает вопрос: как связаны между собой спектральные параметры u, u', u'' матриц R, $\tilde{R}$, $\hat{R}$?

Подставляя выражения (3.51) и (3.52) в первое из уравнений (3.47), приведем его к виду

$$\operatorname{sh}(u + u' + \eta) = \operatorname{sh}(u' + \eta). \tag{3.53}$$

Второе уравнение записывается в виде

$$\operatorname{sh}(u' - u) = \operatorname{sh} u'', \tag{3.54}$$

а третье

$$\operatorname{sh}(u' - u'') = \operatorname{sh} u. \tag{3.55}$$

Общее решение уравнений (3.53), (3.54) и (3.55) таково:

$$u' = u + u'' + 2\pi i k, \tag{3.56}$$

где k — любое целое число. Но увеличение переменной u' на $2\pi i k$ не влияет на a, b, c; поэтому без потери общности можно принять

$$u' = u + u''. \tag{3.57}$$

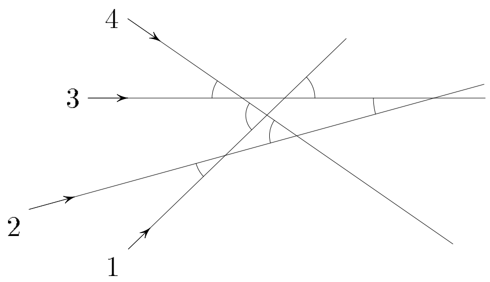

Рис. 3.37.

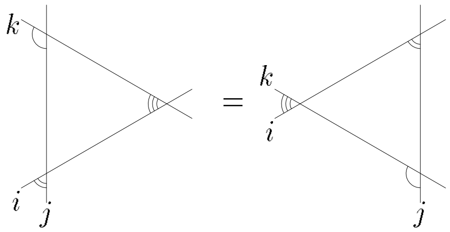

Рис. 3.38.

Таким образом, уравнения Янга-Бакстера принимают вид:

$$R^{12}(u)R^{13}(u')R^{23}(u'-u) = R^{23}(u'-u)R^{13}(u')R^{12}(u).$$

Если теперь рассмотреть нерегулярную решетку, образованную пересечением L прямых (рис. 3.37), то для такой решетки тоже можно определить вершинную модель. Пусть на ребрах решетки расположены спины $\alpha = 1, \ldots, N$. Занумеруем прямые и каждому пересечению сопоставим параметр u^{ij} и матрицу взаимодействия $R^{ij}(u^{ij})$. Будем считать, что матрицы R^{ij} удовлетворяют уравнениям Янга-Бакстера:

$$R^{ij}R^{kj}R^{ki} = R^{ki}R^{kj}R^{ij},$$

что также можно изобразить графически (рис. 3.38).

Оказывается, что статсумма такой модели Z-инвариантна, то есть не меняется при протаскивании прямых друг через друга (рис. 3.39).

Польза такой неоднородной модели была отмечена Бакстером, поскольку роль уравнения Янга-Бакстера становится особенно ясной в Z-инвариантной модели.

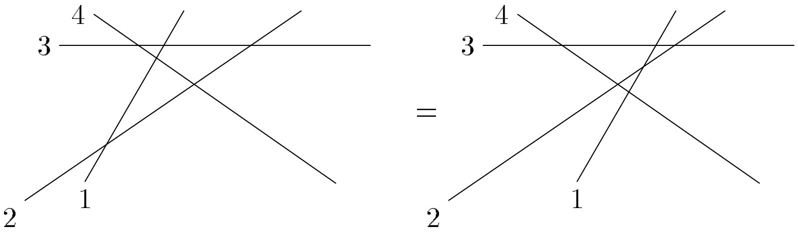

Рис. 3.39.

Подведем итог. Мы получили семейство коммутирующих между собой трансфер-матриц $T(u)$. У этого семейства имеется общая система собственных векторов. Остается найти собственные значения этих трансфер-матриц, то есть решить задачу на собственные значения

$$T(u)\psi = \Lambda(u)\psi.$$

Можно действовать одним из следующих способов:

1) Координатный анзатц Бете;
2) Алгебраический анзатц Бете;
3) Подход Бакстера, основанный на аналитических свойствах собственных значений $T(u)$ и так называемом Q-операторе.

Далее будут продемонстрированы все эти методы нахождения собственных значений трансфер-матриц.

Связь трансфер-матрицы модели льда с гамильтонианом одномерной квантовой цепочки XXZ

Рассмотрим так называемую XXZ-модель. Она является частным случаем модели XYZ — простейшей модели, адекватно описывающей одномерный магнетик, то есть систему на одномерной решетке, в каждом узле которой расположен спин $\vec{\sigma}_k$, взаимодействующий с ближайшими соседями. XYZ-модель обладает гамильтонианом, который может быть записан следующим образом.

Пусть H — двумерное пространство, натянутое на векторы $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. Пусть также на H действуют спиновые матрицы Паули, записанные в этом базисе:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конфигурационное пространство цепочки XXZ можно представить в виде тензорного произведения нескольких копий V_k пространства V, где пространство V_k соответствует k-ому спину. В этом случае мы будем обозначать через σ_k^α $(\alpha = x, y, z)$ спиновые операторы в V_k. Будем также считать, что на остальных пространствах они действуют как тождественные операторы.

Гамильтониан XYZ-модели в терминах так введенных операторов имеет следующий вид:

$$H_{XYZ} = \sum_k \left(J_x \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + J_y \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + J_z \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \right).$$

Здесь k нумерует спины в цепочке. В случаях $J_x = J_y = J_z$ и $J_x = J_y \neq J_z$ ее называют XXX- и XXZ-моделью соответственно.

Очень часто для упрощения записи гамильтониан XXZ записывают в виде

$$H_{XXZ} = \sum_k \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(\eta)} \left(\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \mathrm{ch}(\eta) \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z . \right)$$

Параметр η описывает анизотропию взаимодействия в (x, y, z)-пространстве.

Существует связь между моделями льда и XXZ. Именно, как мы сейчас покажем, логарифмическая производная трансфер-матрицы модели льда в нуле, $T^{-1}(0)\dot{T}(0)$, отличается от гамильтониана XXZ-цепочки, состоящей из N спинов с периодическими граничными условиями, лишь на слагаемое, кратное единичной матрице. Периодичность граничных условий означает, что первый спин отождествляется с $(N+1)$-ым.

Трансфер-матрицу модели льда можно записать следующим образом:

$$T(u) = Tr_0\, R_{01}(u) R_{02} \ldots R_{0N},$$

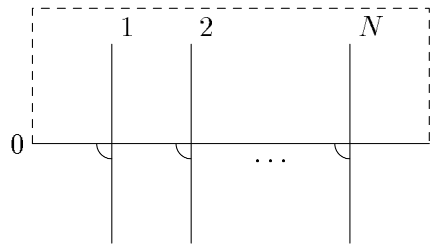

Рис. 3.40.

где R_{0k} действует на тензорном произведении $V_0 \otimes V_k$, где V_0 — вспомогательное пространство, а след берется по этому вспомогательному пространству (см. также рис. 3.40).

Нетрудно проверить, что в базисе $\{+\otimes+, -\otimes+, +\otimes-, -\otimes-\}$ R-матрицу можно выразить через матрицы Паули:

$$R^{\beta\nu}_{\alpha\mu}(u) = \begin{pmatrix} w_0 + w_1\sigma^z & c\sigma^- \\ c\sigma^+ & w_0 - w_1\sigma^z \end{pmatrix},$$

где $w_0 = \frac{a+b}{2}$, $w_1 = \frac{a-b}{2}$.

Учитывая параметризацию, введенную в прошлой лекции, легко получаем:

$$R^{\beta\nu}_{\alpha\mu}(0) = \operatorname{sh}\eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{sh}\eta\, \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu}$$

(нормировочный множитель ρ мы положили равным единице). Последний оператор базис $\{+\otimes+, +\otimes-, -\otimes+, -\otimes-\}$ переводит в базис $\{+\otimes+, -\otimes+, +\otimes-, -\otimes-\}$ и, следовательно, просто меняет местами векторы в тензорном произведении: $v\otimes w \to w\otimes v$.

Поэтому трансфер-матрица $T(u)$ в нуле есть просто оператор сдвига $T^{\beta_1\ldots\beta_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_N}(0) = (\operatorname{sh}\eta)^N \delta^{\beta_2}_{\alpha_1}\delta^{\beta_3}_{\alpha_2}\ldots\delta^{\beta_1}_{\alpha_N}$. Этот оператор действует следущим образом:

$$T(0) : v_{\alpha_1}\otimes v_{\alpha_2}\otimes\ldots\otimes v_{\alpha_N} \to v_{\alpha_N}\otimes v_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes v_{\alpha_{N-1}}$$

Теперь нетрудно найти обратный оператор T^{-1}:

$$(T^{\beta_1\ldots\beta_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_N}(0))^{-1} = (\operatorname{sh}\eta)^{-N}\delta^{\beta_n}_{\alpha_1}\delta^{\beta_1}_{\alpha_2}\ldots\delta^{\beta_{N-1}}_{\alpha_N}.$$

На следующем шаге продифференцируем трансфер-матрицу $T(u)$ по u и возьмем получившуюся производную в нуле. Как и раньше,

$$\frac{d}{du}T^{\beta_1,\ldots,\beta_N}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}(0) = (\operatorname{sh}\eta)^N \sum_{i=1}^{N} \delta^{\beta_2}_{\alpha_1}\ldots\delta^{\beta_{i-1}}_{\alpha_{i-2}}\dot R^{\beta_i\beta_{i+1}}_{\alpha_{i-1}\alpha_i}\delta^{\beta_{i+2}}_{\alpha_{i+1}}\ldots\delta^{\beta_1}_{\alpha_N}.$$

Производная от R-матрицы с учетом выражения для нее находится элементарно. Взяв же ее значение в нуле, получим

$$\dot R(0) = \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{ch}\eta \end{pmatrix}.$$

Суммируя все перечисленное, мы приходим к следующему выражению для логарифмической производной трансфер-матрицы модели льда, взятой в нуле:

$$(T^{-1}(0)\dot T(0))^{\beta_1\ldots\beta_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_N} = \sum_{i=1}^{N}(R^{-1}(0)\dot R(0))^{\beta_i\beta_{i+1}}_{\alpha_i\alpha_{i+1}}$$

Нетрудно убедиться, что выражение под знаком суммы есть соответствующий матричный элемент оператора

$$\frac{1}{2\operatorname{sh}\eta}\left(\sigma^x_i\sigma^x_{i+1} + \sigma^y_i\sigma^y_{i+1} + \frac{\operatorname{ch}\eta}{2}\left(I_iI_{i+1} + \sigma^z_i\sigma^z_{i+1}\right)\right),$$

где I_k — тождественный оператор, действующий на V_k.

В результате мы видим, что с точностью до аддитивного слагаемого, пропорционального единичной матрице,

$$T^{-1}(0)\dot T(0) = H_{XXZ}$$

Замечание. Попутно мы получили, что для любого u трансфер-матрица $T(u)$ коммутирует с гамильтонианом H_{XXZ} (это очевидно, поскольку трансфер-матрицы образуют коммутирующее семейство). Следовательно, задача о нахождении собственных векторов гамильтониана H_{XXZ} эквивалентна задаче о нахождении собственных векторов семейства трансфер-матриц модели льда. В этом смысле имеется соответствие между классической двумерной задачей статистической физики и квантовой одномерной задачей. На самом деле имеется общий принцип, устанавливающий эквивалентность между d-мерными классическими решеточными моделями и $(d-1)$-мерными квантовыми решеточными моделями при нулевой температуре.

4. Бете-анзатц

Координатный Бете-анзатц

Рассмотрим гамильтониан одномерной квантовой цепочки Гейзенберга XXZ со спином $s = \frac{1}{2}$ в каждом узле:

$$H_{xxz} = J \sum_{x=1}^{N-1} \left(\sigma_x^+ \sigma_{x+1}^- + \sigma_x^- \sigma_{x+1}^+ + \frac{\Delta}{2} \sigma_x^z \sigma_{x+1}^z \right).$$

Вместо параметра Δ иногда удобно использовать другой параметр η, связанный с Δ соотношением

$$\Delta = \cos 2\eta.$$

Наложим цилиндрические граничные условия, то есть будем считать, что N-ый и первый спины взаимодействуют друг с другом. В гамильтониане это можно учесть формально, вводя дополнительный $(N+1)$-ый спин и отождествляя его с первым.

Конфигурационное пространство цепочки можно представить в виде прямой суммы

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_N,$$

где через V_i обозначено конфигурационное пространство изолированного i-ого спина.

В каждом V_i рассмотрим базис, в котором σ^z диагональна. Обозначим символами $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ векторы, отвечающие собственным значениям $\sigma^z = +1$ и $\sigma^z = -1$:

$$\sigma^z|\uparrow\rangle = +|\uparrow\rangle, \qquad \sigma^z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle.$$

Для определенности положим $J = -1$. Тогда вектору

$$\psi_0 = |\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\rangle$$