имеется соответствие между классической двумерной задачей статистической физики и квантовой одномерной задачей. На самом деле имеется общий принцип, устанавливающий эквивалентность между d-мерными классическими решеточными моделями и $(d-1)$-мерными квантовыми решеточными моделями при нулевой температуре.

4. Бете-анзатц

Координатный Бете-анзатц

Рассмотрим гамильтониан одномерной квантовой цепочки Гейзенберга XXZ со спином $s = \frac{1}{2}$ в каждом узле:

$$H_{xxz} = J \sum_{x=1}^{N-1} \left(\sigma_x^+ \sigma_{x+1}^- + \sigma_x^- \sigma_{x+1}^+ + \frac{\Delta}{2} \sigma_x^z \sigma_{x+1}^z \right).$$

Вместо параметра Δ иногда удобно использовать другой параметр η, связанный с Δ соотношением

$$\Delta = \cos 2\eta.$$

Наложим цилиндрические граничные условия, то есть будем считать, что N-ый и первый спины взаимодействуют друг с другом. В гамильтониане это можно учесть формально, вводя дополнительный $(N+1)$-ый спин и отождествляя его с первым.

Конфигурационное пространство цепочки можно представить в виде прямой суммы

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_N,$$

где через V_i обозначено конфигурационное пространство изолированного i-ого спина.

В каждом V_i рассмотрим базис, в котором σ^z диагональна. Обозначим символами $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ векторы, отвечающие собственным значениям $\sigma^z = +1$ и $\sigma^z = -1$:

$$\sigma^z|\uparrow\rangle = +|\uparrow\rangle, \qquad \sigma^z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle.$$

Для определенности положим $J = -1$. Тогда вектору

$$\psi_0 = |\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\rangle$$

соответствует минимум энергии $E = -\frac{N}{2}\cos 2\eta$. Будем отсчитывать энергию от этого наименьшего уровня, то есть сделаем замену

$$H_{xxz} \to H_{xxz} - E.$$

Гамильтониан принимает вид

$$H_{xxz} = -\sum_{x=1}^{N}\left(\sigma_x^+\sigma_{x+1}^- + \sigma_x^-\sigma_{x+1}^+ + \frac{\Delta}{2}(\sigma_x^z\sigma_{x+1}^z - 1)\right).$$

Введем оператор суммарного спина $S^z = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{N}\sigma_n^z$.

Легко проверить, что $[H, S^z] = 0$. Поэтому существует система векторов, собственных и для H_{xxz}, и для S^z.

Для нахождения собственных значений и собственных векторов гамильтониана H_{xxz} мы используем координатный анзатц Бете.

Случай одного перевернутого спина. Пусть $|x\rangle = \sigma_x^-\psi_0$, $x = 1, \ldots, N$. Рассмотрим пространство, порожденное этими векторами. Очевидно, что

$$H|x\rangle = -|x+1\rangle - |x-1\rangle + 2\Delta|x\rangle. \qquad (3.58)$$

Пусть

$$\Phi = \sum_{x=1}^{N} a(x)|x\rangle. \qquad (3.59)$$

Мы хотим найти такие Φ, что $H\Phi = \varepsilon\Phi$. Используя (3.58), получим систему уравнений:

$$-a(x+1) - a(x-1) + 2\Delta a(x) = \varepsilon a(x). \qquad (3.60)$$

Кроме того, в силу периодичности граничных условий,

$$a(N+1) = a(1). \qquad (3.61)$$

Будем искать решение в виде

$$a(x) = e^{2ikx}. \qquad (3.62)$$

Подставляя (3.62) в (3.60), получаем

$$\varepsilon = 2(\Delta - \cos 2k) = 2(\cos 2\eta - \cos 2k),$$

а из (3.61) следует ограничение на k:

$$e^{2ikN} = 1.$$

Из последнего равенства мы видим, что

$$k = \frac{\pi n}{N}, \qquad n = 0, \ldots, N-1.$$

Таким образом, мы получаем N собственных векторов.

Найденное нами решение называется *одночастичным* и описывает возбуждение системы, соответствующее одной квазичастице.

Случай двух перевернутых спинов. Пусть $|x,y\rangle = \sigma_y^- \sigma_x^- \psi_0, x < y$. Это подпространство векторов со спином $\frac{N}{2} - 2$. Пусть

$$\Phi = \sum_{x,y=1}^{N} a(x,y)|x,y\rangle, \qquad x < y. \tag{3.63}$$

Аналогично предыдущему случаю, получаем систему

$$\begin{aligned} &a(x-1,y) + a(x+1,y) + a(x,y-1) + a(x,y+1) = \\ &\qquad = (4\Delta - \varepsilon)a(x,y), \qquad x < y-1, \\ &a(x-1,x+1) + a(x,x+2) = (2\Delta - \varepsilon)a(x,x+1), \qquad x = y-1. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Второе уравнение нельзя получить из первого формальной подстановкой $x = y - 1$, потому что не определены $a(x,x)$. Нам все же хотелось бы распространить область применимости первого уравнения и на случай $x = y - 1$. Это можно сделать, если выполнены следующие равенства:

$$a(x,x) + a(x+1,x+1) = 2\Delta a(x,x+1), \qquad 0 \leqslant x \leqslant N. \tag{3.65}$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &a(x-1,y)+a(x+1,y)+a(x,y-1)+a(x,y+1)= \\ &\qquad =(4\Delta-\varepsilon)a(x,y), \qquad x<y-1, \\ &a(x,x)+a(x+1,x+1)=2\Delta a(x,x+1), \qquad 0\leqslant x\leqslant N. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Ищем ее решение в виде

$$a(x,y)=e^{2ik_1x+2ik_2y}. \tag{3.67}$$

Подставляя последнее выражение в (3.66), получаем

$$\varepsilon=2(\cos 2\eta-\cos 2k_1)+2(\cos 2\eta-\cos 2k_2).$$

Заметим, что найденное значение энергии симметрично относительно замены $k_1\leftrightarrow k_2$. Следовательно, функция $e^{2ik_2x+2ik_1y}$ тоже будет решением (3.66) с таким же собственным значением. Совершенно очевидная идея состоит в том, чтобы обобщить решение (3.67) и попробовать линейную комбинацию

$$a(x,y)=A_{12}e^{2ik_1x+2ik_2y}+A_{21}e^{2ik_2x+2ik_1y}, \tag{3.68}$$

где коэффициенты A_{12}, A_{21}, вообще говоря, зависят от k_1, k_2 и не зависят от x, y. Подставив (3.68) в (3.65), вводя функцию сдвига $\psi(k_1,k_2)$, связывающую коэффициенты A_{12} и A_{21} соотношением

$$A_{12}=e^{\psi(k_1,k_2)}A_{21},$$

после простых преобразований получим

$$e^{\psi(k_1,k_2)}=-\frac{1-2\Delta e^{2ik_1}+e^{2ik_1+2ik_2}}{1-2\Delta e^{2ik_2}+e^{2ik_1+2ik_2}}. \tag{3.69}$$

Функцию $\psi(k_1,k_2)$ естественно продолжить нечетным образом, то есть считать $\psi(k_1,k_2)=-\psi(k_2,k_1)$. Как и в предыдущем случае, теперь нужно учесть условие периодичности, которое имеет вид

$$a(x,N+1)=a(1,x).$$

Действительно, поскольку $y>x$, вектор $|x,N+1\rangle$ совпадает с вектором $|0,x\rangle$. Следовательно, и коэффициенты при этих векторах должны совпадать.

Подставляя (3.68) в условие периодичности, получаем

$$\begin{cases} e^{2ik_1N} = e^{\psi(k_1,k_2)}, \\ e^{2ik_2N} = e^{\psi(k_2,k_1)}, \end{cases} \tag{3.70}$$

или, учитывая (3.69),

$$\begin{cases} e^{2ik_1N} = -\dfrac{1 - 2\Delta e^{2ik_1} + e^{2ik_1+2ik_2}}{1 - 2\Delta e^{2ik_2} + e^{2ik_1+2ik_2}}, \\ e^{2ik_2N} = -\dfrac{1 - 2\Delta e^{2ik_2} + e^{2ik_1+2ik_2}}{1 - 2\Delta e^{2ik_1} + e^{2ik_1+2ik_2}}. \end{cases} \tag{3.71}$$

Решив (3.71), мы из (3.69) находим функцию $\psi(k_1, k_2)$. Затем из (3.68) определяем $a(x, y)$, выбрав, например, следующую нормировку коэффициентов A_{12} и A_{21}:

$$\begin{cases} A_{12} = e^{\frac{1}{2}\psi(k_1,k_2)}, \\ A_{21} = e^{\frac{1}{2}\psi(k_2,k_1)}. \end{cases}$$

Затем из (3.63) определяется вектор Φ.

Случай n перевернутых спинов. Абсолютно аналогично случаям одного и двух перевернутых спинов ищем собственный вектор в виде

$$\Psi = \sum_{x_1,\ldots,x_n=1}^{N} a(x_1,\ldots,x_n)|x_1,\ldots,x_n\rangle, \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_n. \tag{3.72}$$

Уравнение $H\Psi = \varepsilon\Psi$ эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &a(x_1 - 1,\ldots,x_n) + a(x_1 + 1,\ldots,x_n) + \ldots + \\ &\quad + a(x_1,\ldots,x_m - 1,\ldots,x_n) + \\ &\quad + a(x_1,\ldots,x_m + 1,\ldots,x_n) + \ldots + \\ &\quad + a(x_1,\ldots,x_n + 1) = (2n\Delta - \varepsilon)a(x_1,\ldots,x_n), \end{aligned} \tag{3.73}$$

где разность $x_{i+1} - x_i > 1$. Если же мы распространим область применимости (3.73) на область $x_i - x_{i-1} = 1$, то необходимо дополнить систему (3.73) уравнениями

$$a(x_1, \dots, x_\alpha, x_\alpha, \dots, x_n) + a(x_1, \dots, x_\alpha + 1, x_\alpha + 1, \dots, x_n) = \\ = 2\Delta a(x_1, \dots, x_\alpha, x_\alpha + 1, \dots, x_n). \tag{3.74}$$

Будем искать решение в виде суперпозиции плоских волн:

$$a(x_1, \dots, x_n) = A(k_1, \dots, k_n) e^{2i(x_1 k_1 + \dots + x_n k_n)}. \tag{3.75}$$

Из (3.73) и (3.74) следует, что (3.75) является решением в области $x_1 < x_2 - 1$, $x_2 < x_3 - 1, \dots$, причем энергия равна

$$\varepsilon = 2 \sum_{k=1}^{n} (\Delta - \cos 2k_i). \tag{3.76}$$

Решение при произвольных x_i ищем в виде

$$a(x_1, \dots, x_n) = \sum_P A_{p_1, \dots, p_n} e^{2ik_{p_1} x_1 + \dots + 2ik_{p_n} x_n}, \tag{3.77}$$

где суммирование распространяется на все $n!$ перестановок $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ целых чисел $1, \dots, n$.

Бете предположил, что коэффициенты A не зависят от x_i и, вообще говоря, зависят от k_i. Подстановка (3.77), в которой коэффициенты A удовлетворяют гипотезе Бете, называется анзатцем Бете.

Как и раньше, зададим функции $\psi_{\alpha,\beta} = \psi(k_\alpha, k_\beta)$ формулой

$$A_{p_1, \dots, p_\alpha, \dots, p_\beta, \dots, p_n} = e^{\psi_{p_\alpha, p_\beta}} A_{p_1, \dots, p_\beta, \dots, p_\alpha, \dots, p_n}. \tag{3.78}$$

Например,

$$\begin{aligned} A_{1,2,3,\dots,n-1,n} &= e^{\psi_{1,2}} A_{2,1,3,\dots,n-1,n}, \\ A_{2,3,1,\dots,n-1,n} &= e^{\psi_{3,1}} A_{2,1,3,\dots,n-1,n}, \\ A_{3,2,1,\dots,n-1,n} &= e^{\psi_{3,1}} A_{1,2,3,\dots,n-1,n}, \\ A_{1,2,3,\dots,n,n-1} &= e^{\psi_{n,n-1}} A_{1,2,3,\dots,n-1,n}. \end{aligned}$$

Используя определение $\psi_{\alpha,\beta}$, введем нормировку коэффициентов $A_{p_1,p_2,\ldots,p_n}$:

$$A_{p_1,\ldots,p_n} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha<\beta}\psi_{p_\alpha,p_\beta}\right)$$

Подставив (3.77) в (3.74), учитывая (3.78) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых экспонентах, получаем соотношения, аналогичные (3.69):

$$e^{\psi(k_i,k_j)} = -\frac{1-2\Delta e^{2ik_i}+e^{2ik_i+2ik_j}}{1-2\Delta e^{2ik_j}+e^{2ik_i+2ik_j}}, \qquad k_i<k_j. \tag{3.79}$$

Учитывая условие периодичности, которое в этом случае выглядит как

$$a(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},N) = a(1,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}),$$

где $1<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<N$, и приравнивая опять коэффициенты при линейно независимых функциях, получаем соотношения, аналогичные (3.71):

$$\exp(2ik_jN) = \exp\left(\sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{N}\psi(k_\alpha,k_j)\right),$$

то есть должна существовать такая последовательность целых чисел $\{I_\alpha\}$, что

$$2Nk_\alpha = 2\pi I_\alpha + \sum_\beta \psi_{\alpha\beta}, \qquad 1\leqslant\alpha\leqslant N. \tag{3.80}$$

Система (3.80) является системой уравнений для определения наборов $\{k_\alpha\}$. Собственные значения гамильтониана находятся подстановкой этих $\{k_\alpha\}$ в (3.76).

Будем считать, что $0\leqslant Re\, k_\alpha\leqslant\pi$, $-\pi\leqslant \operatorname{Im}\psi_{\alpha\beta}\leqslant\pi$. Введем следующую параметризацию:

$$\operatorname{ctg} k_\alpha = \operatorname{ctg}\eta\cdot\operatorname{th} u_\alpha,$$

или, что то же самое,

$$e^{2ik_\alpha} = \frac{e^{ik_\alpha}}{e^{-ik_\alpha}} = \frac{ctg\, k_\alpha + i}{ctg\, k_\alpha - i} = \frac{\operatorname{sh}(u_\alpha+i\eta)}{\operatorname{sh}(u_\alpha-i\eta)}.$$

Тогда из (3.79) получаем:

$$e^{\psi(k_\alpha,k_\beta)} = \frac{\operatorname{sh}(u_\alpha - u_\beta + 2i\eta)}{\operatorname{sh}(u_\alpha - u_\beta - 2i\eta)}.$$

Тогда систему уравнений для определения возможных значений наборов $\{k_\alpha\}$ можно переписать следующим образом:

$$\left[\frac{\operatorname{sh}(u_\alpha + i\eta)}{\operatorname{sh}(u_\alpha - i\eta)}\right]^N = \prod_\beta \frac{\operatorname{sh}(u_\alpha - u_\beta + 2i\eta)}{\operatorname{sh}(u_\alpha - u_\beta - 2i\eta)}.$$

Эта система имеет ненулевые решения в выделенной нами области значений k_α.

Таким образом, нам удалось сшить решения системы (3.73), полученные в разных физических областях ($N!$ областей вида $x_{p_1} < x_{p_2} < \ldots < x_{p_N}$). То обстоятельство, что это можно сделать, по сути дела нетривиально. Происходит как бы маленькое чудо. Оно и называется координатным анзатцем Бете.

Алгебраический Бете-анзатц

Продолжим рассмотрение задачи о диагонализации трансфер-матрицы $T(u)$ шестивершинной модели. Бакстером был предложен очень красивый способ нахождения собственных значений и собственных векторов $T(u)$, который, к тому же, может быть с успехом применен и к более общей модели — восьмивершинной. Он носит название алгебраического анзатца Бете и приводит к тем же самым уравнениям, что и координатный, но путем гораздо меньших вычислений.

Для начала дадим определение оператора монодромии $L(u)$. Это есть матричное произведение

$$L(u) = R_{01}(u)R_{02}(u)\ldots R_{0N}(u),$$

причем в произведении участвуют только индексы, отвечающие вспомогательному пространству «0», а по индексам, отвечающим пространствам $1,\ldots,N$, подразумевается тензорное произведение. Графически это изображено на рис. 3.41.

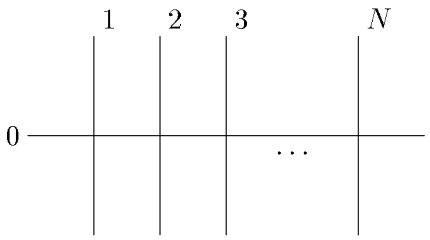

Рис. 3.41.

Оператор $L(u)$ может быть записан в виде матрицы 2×2, элементы которой маркируются индексами, соответствующими вспомогательному пространству:

$$L(u) = \begin{pmatrix} L_+^+(u) & L_+^-(u) \\ L_-^+(u) & L_-^-(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$, $D(u)$ суть матрицы размера $2^N \times 2^N$.

Из определения трансфер-матрицы модели льда следует, что

$$T(u) = \mathrm{Tr}_0\ L(u) = A(u) + D(u),$$

где след берется только по вспомогательному пространству.

Матрица монодромии удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера:

$$R_{12}(u-v) \overset{1}{L}(u) \overset{2}{L}(v) = \overset{1}{L}(v) \overset{2}{L}(u) R_{12}(u-v). \tag{3.81}$$

Справедливость этого уравнения легче всего установить, если представить его в графическом виде. Произведение $\overset{1}{L}(u) \overset{2}{L}(v)$ изображено на рис. 3.42.

В символической форме рис. 3.42 представляет из себя матричное произведение (в базисе $\{+\otimes +, +\otimes -, -\otimes +, -\otimes -\}$):

$$L(u)\otimes L(v) = \begin{pmatrix} L(u)A(v) & L(u)B(v) \\ L(u)C(v) & L(u)D(v) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A(u)A(v) & B(u)A(v) & A(u)B(v) & B(u)B(v) \\ C(u)A(v) & D(u)A(v) & C(u)B(v) & D(u)B(v) \\ A(u)C(v) & B(u)C(v) & A(u)D(v) & B(u)D(v) \\ C(u)C(v) & D(u)C(v) & C(u)D(v) & D(u)D(v) \end{pmatrix}.$$

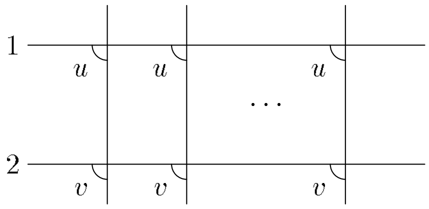

Рис. 3.42.

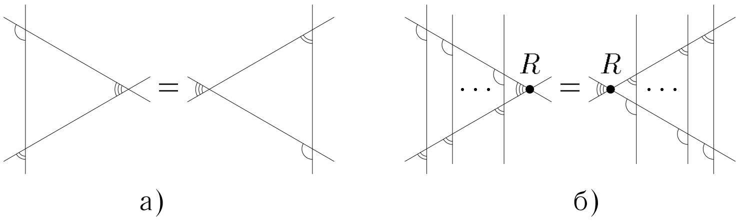

Рис. 3.43.

Тогда уравнение Янга-Бакстера (3.81) можно графически представить на рис. 3.43а.

Из этого графического представления хорошо видно, что равенство (3.81) получается N-кратным применением уравнения Янга-Бакстера для R-матрицы (см. рис. 3.43б).

Перейдем теперь к непосредственному изложению алгебраического анзатца Бете. Его сердцем являются коммутационные соотношения между блочными элементами матрицы монодромии $L(u)$:

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix},$$

получающиеся из уравнения Янга-Бакстера, а также нильпотентность матрицы σ^+.

Выпишем явно те коммутационные соотношения между $A(u)$, $B(u), C(u)$, $D(u)$, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\begin{cases} [B(u), B(v)] = 0, \\ b(v-u)A(u)B(v) = a(v-u)B(v)A(u) - c(v-u)B(u)A(v), \\ b(u-v)D(u)B(v) = a(u-v)B(v)D(u) - c(u-v)B(u)D(v). \end{cases} \tag{3.82}$$

Здесь мы используем обычную параметризацию

$$a(u) = \operatorname{sh}(\eta - u), \qquad b(u) = \operatorname{sh} u, \qquad c(u) = \operatorname{sh} \eta.$$

Заметим, что из явного вида $b(u)$ следует, что $b(u - v) = -b(v - u)$.

Перейдем теперь к построению специального состояния — порождающего вектора в пространстве $(\mathbb{C}^2)^N$ — пространстве состояний квантовой системы N спинов. Перепишем локальную R-матрицу в виде

$$R = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sigma^z & c\sigma^- \\ c\sigma^+ & \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sigma^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(u) & \beta \\ \gamma & \delta(u) \end{pmatrix}.$$

(Подчеркнем, что β и γ не зависят от спектрального параметра.)

Тогда в локальном пространстве n, как легко видеть, существует вектор

$$e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

такой, что матрица R_{0n} действует на него следующим образом:

$$R_{0n} e_n = \begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Назовем вектор e_n локальным вакуумом. Он зануляет левый нижний элемент матрицы $R_{0n}(u)$ и при всех u является собственным вектором для диагональных элементов. Здесь существенна нильпотентность матрицы σ^+, поскольку только для нильпотентной матрицы всегда существует вектор, действуя ею на который, мы получаем нуль.

Построим теперь вектор ψ_0, который есть тензорное произведение N двумерных векторов:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Действуя на него матрицей монодромии $L(u)$, получаем

$$L(u)\psi_0 = \begin{pmatrix} a^N \psi_0 & * \\ 0 & b^N \psi_0 \end{pmatrix},$$

где звездочкой обозначены не интересующие нас матричные элементы. Последнее выражение следует из правила умножения треугольных матриц.

Для наглядности, в качестве примера, рассмотрим случай $N = 2$. Перемножая матрицы R_{01} и R_{02}, получаем

$$
\begin{aligned}
R_{01}R_{02} &= \begin{pmatrix} \alpha_1(u) & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2(u) & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2(u) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2 \\ \gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Действуя получившейся матрицей на вектор

$$
\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

приходим к желаемому результату:

$$
(R_{01}R_{02})\psi_0 = \begin{pmatrix} a^2(u)\psi_0 & * \\ 0 & b^2(u)\psi_0 \end{pmatrix}.
$$

Опять вернемся к случаю произвольного N. Построенное состояние ψ_0 будем называть порождающим вектором. Полученные соотношения

$$
\begin{cases} A(u)\psi_0 = a^N(u)\psi_0, \\ D(u)\psi_0 = b^N(u)\psi_0, \\ C(u)\psi_0 = 0 \end{cases}
$$

мы используем для нахождения собственных значений и собственных векторов оператора $A(u) + D(u)$, то есть трансфер-матрицы $T(u)$.

Будем искать собственные векторы $T(u)$ в виде

$$
\Phi(v_1, \ldots, v_n) = B(v_1)B(v_2)\ldots B(v_n)\psi_0. \tag{3.83}
$$

С помощью соотношений (3.82) мы можем преобразовать выражение

$$
(A(u) + D(u))\, B(v_1)B(v_2)\ldots B(v_n)\psi_0, \tag{3.84}
$$

пронося $A(u)$ и $D(u)$ через $B(v_l)$ к ψ_0.

Покажем, что

$$
\begin{aligned}
&(A(u)+D(u))B(v_1)\dots B(v_2)\psi_0 = \\
&\quad = \left[a^N(u)\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}(\eta+u-v_i)}{\operatorname{sh}(v_i-u)} + b^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{\operatorname{sh}(\eta+v_i-u)}{\operatorname{sh}(u-v_i)}\right]\times \\
&\quad \times B(v_1)\dots B(v_n)\psi_0 + \dots, \qquad (3.85)
\end{aligned}
$$

где многоточие обозначает n нежелательных слагаемых вида

$$
\Lambda_j\cdot B(u)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} B(u_l)\psi_0, \qquad j=1,\dots,n, \qquad (3.86)
$$

где Λ_j — числовые коэффициенты, которые мы сейчас вычислим.

Перепишем нужные нам перестановочные соотношения в виде

$$
\begin{aligned}
A(u)B(v) &= \frac{a(v-u)}{b(v-u)}B(v)A(u) - \frac{c(v-u)}{b(v-u)}B(u)A(v), \\
D(u)B(v) &= \frac{a(u-v)}{b(u-v)}B(v)D(u) - \frac{c(u-v)}{b(u-v)}B(u)D(v).
\end{aligned} \qquad (3.87)
$$

Если теперь при протаскивании $A(u)$ и $D(u)$ через $B(v_l)$ мы будем учитывать только первые слагаемые в правых частях формул (3.87), то в результате мы немедленно заключаем, что коэффициент при $B(v_1)B(v_2)\dots B(v_n)\psi_0$ дается выражением

$$
a^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(v_i-u)}{b(v_i-u)} + b^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u-v_i)}{b(u-v_i)}.
$$

Найдем теперь структуру нежелательных членов. Если $j=1$, то при коммутации $A(u)$ и $D(u)$ с $B(v_1)$ мы используем вторые слагаемые в (3.87), а при дальнейшей коммутации возникших $A(v_1)$ и $D(v_1)$ с $B(v_l)$, $l\geqslant 2$, опять будем учитывать только первые слагаемые в (3.87). В результате получим слагаемое

$$
\begin{aligned}
&\frac{c(u-v_1)}{b(u-v_1)}\left(a^N(v_1)\prod_{l=2}^{n}\frac{a(v_l-v_1)}{b(v_l-v_1)} - b^N(v_1)\prod_{l=2}^{n}\frac{a(v_1-v_l)}{b(v_1-v_l)}\right)\times \\
&\qquad \times B(u)B(v_2)B(v_3)\dots B(v_n)\psi_0.
\end{aligned}
$$

Для нахождения остальных нежелательных членов заметим, что в силу коммутативности операторов $B(v_l)$ выражение (3.84) является симметрической функцией от $v_1, \ldots, v_n$ и, следовательно, оставшиеся нежелательные члены получаются из найденного нами надлежащей перестановкой переменных v_l. Тем самым, коэффициенты Λ_j в (3.86) имеют вид

$$\Lambda_j = \frac{c(u-v_j)}{b(u-v_j)} \left(a^N(v_j) \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \frac{a(v_l-v_j)}{b(v_l-v_j)} - b^N(v_j) \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \frac{a(v_j-v_l)}{b(v_j-v_l)} \right). \tag{3.88}$$

Здесь j пробегает значения от 1 до n.

Поскольку мы хотим, чтобы вектор $B(v_1)\ldots B(v_n)\psi_0$ был собственным вектором трансфер-матрицы, сумму нежелательных членов необходимо положить равной нулю. Мы же потребуем большего — будем считать, что исчезает каждое слагаемое в отдельности, то есть

$$\Lambda_j(u; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

или, что то же самое,

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{\mathrm{sh}(v_j - v_i + \eta)}{\mathrm{sh}(v_j - v_i - \eta)} = - \left[\frac{\mathrm{sh}(v_j)}{\mathrm{sh}(\eta - v_j)} \right]^N . \tag{3.89}$$

Последние уравнения, как легко видеть, совпадают с уравнениями, полученными при помощи координатного анзатца Бете.

Отметим, что в формулах (3.83), (3.85), (3.89) допустимыми значениями параметра n являются $0, 1, \ldots, N$, так как при $n > N$ выражение (3.83) тождественно обращается в нуль. Это следует из коммутативности операторов $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ при разных j и равенства $\beta_j^2 = 0$.

Для наглядности опять рассмотрим случай $N = 2$. Собственные вектора трансфер-матрицы $T(u)$ следует искать в виде

$$\Phi(v_1, v_2) = B(v_1)B(v_2)\psi_0. \tag{3.90}$$

Действуя на (3.90) трансфер-матрицей, получим

$$
\begin{aligned}
&(A(u)+D(u))B(v_1)B(v_2)\psi_0 = \\
&\quad = \frac{a(v_1-u)}{b(v_1-u)}\frac{a(v_2-u)}{b(v_2-u)}B(v_1)B(v_2)A(u)\psi_0 - \\
&\quad - \frac{c(v_1-u)}{b(v_1-u)}\frac{a(v_2-v_1)}{b(v_2-v_1)}B(u)B(v_2)A(v_1)\psi_0 + \\
&\quad + \left\{\frac{c(v_1-u)c(v_2-v_1)}{b(v_1-u)b(v_2-v_1)} - \frac{a(v_1-u)c(v_2-u)}{b(v_1-u)b(v_2-u}\right\} \times \\
&\quad \times B(u)B(v_1)A(v_2)\psi_0 + \ldots,
\end{aligned}
$$

где под многоточием подразумеваются аналогичные члены для $D(u)$.

Выражение в фигурных скобках можно преобразовать, используя обычную параметризацию и теоремы сложения для тригонометрических функций. В результате получаем желаемый результат (3.85).

Из этого вывода становится ясным, что прямое доказательство равенства (3.88) должно опираться на формулы сложения для коэффициентов a, b, c. Мы же существенно облегчили себе работу, использовав симметричность произведения $B(v_1)B(v_2)\ldots B(v_n)$ относительно перестановки аргументов $v_1, \ldots, v_n$.

Также следует отметить, что при выводе соотношения (3.88) мы использовали то обстоятельство, что все v_i различны. Случай совпадающих v_i требует специального обсуждения, и, ввиду сложности вопроса, мы опустим здесь его изложение.

Алгебраический анзатц Бете и Q-оператор

В этой лекции мы изложим еще один вариант алгебраического анзатца Бете. Он основан на использовании так называемых Q-оператора Бакстера и уравнения $T{-}Q$, которому удовлетворяет этот оператор.

Пусть нам удалось найти такие векторы $\psi^i(\beta)$ и $p^i(\mu)$, где $i = 1, \ldots, N$, что

$$\sum_{\beta,\nu} R^{\alpha\mu}_{\beta\nu}\psi^i(\beta)p^{i+1}(\nu) = \tilde{\psi}^i(\alpha)p^i(\mu) \tag{3.91}$$

и, кроме того, $p^{N+1}(\mu) = p^1(\mu)$.

Тогда, как мы сейчас покажем, две матрицы $G_i(+)$ и $G_i(-)$, задаваемые своими матричными элементами посредством формул

$$[G_i(+)]^{\nu}_{\mu} = \sum_{\beta} R^{\beta\nu}_{+\mu}\psi^i(\beta), \qquad [G_i(-)]^{\nu}_{\mu} = \sum_{\beta} R^{\beta\nu}_{-\mu}\psi^i(\beta), \tag{3.92}$$

преобразованием подобия

$$G_i(\alpha) \to M_i^{-1} G_i(\alpha) M_{i+1} \equiv \tilde{G}_i(\alpha) \tag{3.93}$$

могут быть приведены к треугольному виду. Первый столбец матрицы M_i есть вектор p_i, а второй ортогонален ему:

$$M_i = \begin{pmatrix} p^i(+) & -p^i(-) \\ p^i(-) & p^i(+) \end{pmatrix} = (p, p^{\perp}).$$

Обратная матрица:

$$M_i^{-1} = \frac{1}{\det M_i} \begin{pmatrix} p^i(+) & p^i(-) \\ -p^i(-) & p^i(+) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det M_i} \begin{pmatrix} p \\ p^{\perp} \end{pmatrix},$$

где $\det\ M_i = [p^i(+)]^2 + [p^i(-)]^2$.

Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} [\tilde{G}_i]_{21}(\alpha) &= \frac{1}{\det M_i} p_i^{\perp}(\mu) R^{\beta\nu}_{\alpha\mu}\psi^i(\beta) p^{i+1}(\nu) = \\ &= \frac{1}{\det M_i} \tilde{\psi}^i(\alpha)[p_i^{\perp}(\mu) p_i(\mu)] = 0. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} \tilde{G}^i_{11}(\alpha) &= \frac{1}{\det M_i} \tilde{\psi}^i(\alpha)(p^i(\mu)p^i(\mu)) = \tilde{\psi}, \\ \tilde{G}^i_{22}(\alpha) &= \frac{1}{\det M_i} p_i^{\perp}(\mu) R^{\beta\nu}_{\alpha\mu}\psi^i(\beta) p^{\perp}_{i+1}(\nu) \equiv \tilde{\tilde{\psi}}^i(\alpha). \end{aligned}$$

Если теперь подействовать трансфер-матрицей

$$T^{\beta_1\ldots\beta_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_N} = \mathrm{Tr}_0\, R_{01}R_{02}\ldots R_{0N}$$

на вектор $\psi^1(\alpha_1)\ldots\psi^N(\alpha_N)$, то мы получим:

$$T^{\beta_1\ldots\beta_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_N}\psi^1(\alpha_1)\ldots\psi^N(\alpha_N) = \operatorname{Tr} G_1(\alpha_1)\ldots G_N(\alpha_N) = \\ = \operatorname{Tr}\tilde{G}^1(\alpha_1)\ldots\tilde{G}^N(\alpha_N) = \\ = \tilde{\psi}^1(\alpha_1)\ldots\tilde{\psi}^N(\alpha_N) + \tilde{\tilde{\psi}}^1(\alpha_1)\ldots\tilde{\tilde{\psi}}^N(\alpha_N).$$

(Мы учли, что $p^{N+1}(\mu) = p^1(\mu)$).

Существование достаточно богатого набора линейно независимых решений (3.91) позволяет построить матрицу Q, удовлетворяющую некоторому функциональному уравнению, называемому T-Q-уравнением Бакстера, из которого мгновенно следуют уравнения Бете-анзатца.

Итак, решим уравнение (3.91). Подставляя значения элементов R-матрицы,

$$R^{++}_{++} = R^{--}_{--} = a,\\ R^{+-}_{+-} = R^{-+}_{-+} = b,\\ R^{+-}_{-+} = R^{-+}_{+-} = c,$$

получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} a\psi^i(+)p^{i+1}(+) = \tilde{\psi}^i(+)p^i(+),\\ b\psi^i(-)p^{i+1}(+) + c\psi^i(+)p^{i+1}(-) = \tilde{\psi}^i(-)p^i(+),\\ b\psi^i(+)p^{i+1}(-) + c\psi^i(-)p^{i+1}(+) = \tilde{\psi}^i(+)p^i(-),\\ a\psi^i(+)p^{i+1}(+) + a\psi^i(-)p^{i+1}(-) = \tilde{\psi}^i(-)p^i(-). \end{cases} \tag{3.94}$$

Эти уравнения линейны и однородны относительно $\psi^i(\alpha)$, $\tilde{\psi}^i(\alpha)$. Чтобы такая система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю. Приходим в итоге к уравнению

$$[a^2 + b^2 - c^2]p_i(+)p_i(-)p_{i+1}(+)p_{i+1}(-) - \\ - ab[p_i^2(+)p_{i+1}^2(-) + p_i^2(-)p_{i+1}^2(+)] = 0. \tag{3.95}$$

Введем обозначение:

$$r_i = \frac{p_i(-)}{p_i(+)}. \tag{3.96}$$

Тогда (3.95) можно переписать в виде

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=\frac{r_{i+1}}{r_i}+\frac{r_i}{r_{i+1}}. \tag{3.97}$$

С учетом параметризации

$$\begin{cases} a=\operatorname{sh}(\eta-u),\\ b=\operatorname{sh}u,\\ c=\operatorname{sh}\eta, \end{cases}$$

(3.97) сводится к

$$\frac{r_{i+1}}{r_i}+\frac{r_i}{r_{i+1}}=-2\operatorname{ch}\eta. \tag{3.98}$$

Мы получили квадратное рекуррентное соотношение между r_i и r_{i+1}. Из него следует, что

$$r_{i+1}=-r_i\exp(\pm\eta). \tag{3.99}$$

Соотношение (3.99) должно выполняться для $i=1,\ldots,N$, причем выбор знака производится независимо для каждого i. Таким образом,

$$r_i=(-1)^i r\exp[\eta(\sigma_1+\ldots+\sigma_{i-1})], \tag{3.100}$$

где r — произвольный коэффициент и каждая переменная σ_i принимает значения ±1.

Если η вещественно и $\Delta<-1$, то, поскольку $p_{N+1}=p_1$,

$$\sigma_1+\ldots+\sigma_N=0, \tag{3.101}$$

откуда следует требование четности N.

Если же $\eta=\dfrac{2\pi im}{n}$, где m и n — целые числа, то достаточно, чтобы сумма $\sigma_1+\ldots+\sigma_N$ была целым кратным n.

Положим теперь $p_i(+)=1$, $\psi_i(+)=1$ для любого $i=1,\ldots,N$. Тогда $p_i(-)=r_i$, $\tilde\psi_i(+)=a$. Кроме того, имеем из третьего уравнения (3.94)

$$c\psi_i=r_i\tilde\psi_i(+)-br_{i+1}=ar_i-br_{i+1},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}\psi_i(-) &= \frac{a}{c}r_i - \frac{b}{c}r_{i+1} = \\ &= r_i \cdot \frac{\operatorname{sh}(\eta - u) + e^{\eta\sigma_i}\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh}\eta} = r_i e^{u\sigma_i}.\end{aligned} \tag{3.102}$$

Аналогично, из второго уравнения (3.94):

$$\tilde{\psi}_i(-) = -ar_i e^{(u+\eta)\sigma_i}. \tag{3.103}$$

В итоге мы получаем, что двумерные векторы $\psi_i(\alpha)$, $\tilde{\psi}_i(\alpha)$, $\tilde{\tilde{\psi}}_i(\alpha)$ можно записать в виде

$$\psi_i = \begin{pmatrix} 1 \\ r_i e^{u\sigma_i} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi}_i = \begin{pmatrix} a \\ -r_i e^{(u+\eta)\sigma_i} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\psi}}_i = \begin{pmatrix} b \\ -r_i e^{(u-\eta)\sigma_i} \end{pmatrix}. \tag{3.104}$$

Введем векторную функцию

$$h_i(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ r_i e^{u\sigma_i} \end{pmatrix}, \tag{3.105}$$

где r_i определены выражением (3.100), то есть не зависят от u. Тогда, как легко видеть,

$$\psi_i = h_i(u), \quad \tilde{\psi}_i = ah_i(u + \eta + i\pi), \quad \tilde{\tilde{\psi}}_i = bh_i(u - \eta - i\pi).$$

Если мы теперь подействуем трансфер-матрицей $T(u)$ на $\psi(u) = \psi_1(u) \otimes \psi_2(u) \otimes \ldots \otimes \psi_N(u)$, то получим уравнение

$$T(u)\psi(u) = a^N\psi(u + \eta + i\pi) + b^N\psi(u - \eta - i\pi). \tag{3.106}$$

Выбирая всевозможные $r, \sigma_1, \ldots, \sigma_N$, такие, что выполнено условие (3.101), мы получим много различных $\psi(u)$. Из них можно составить матрицу Q_R размера $2^N \times 2^N$, рассматривая разные ψ как столбцы Q_R. Эта матрица, в силу (3.106), удовлетворяет уравнению

$$T(u)Q_R(u) = a^N(u)Q_R(u + \eta + i\pi) + b^N(u)Q_R(u - \eta - i\pi). \tag{3.107}$$

Чтобы продвинуться дальше, заметим, что R-матрица обладает так называемым свойством кроссинг-симметрии. Что происходит с элементами $R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(u)$ при замене $u \to \eta - u$? Очевидно, что $c(u)$ в этом случае не изменяется, а $a(u)$ и $b(u)$ переходят друг в друга. Это можно записать следующим образом:

$$R_{\beta\mu'}^{\alpha\nu'}(\eta - u) = (C^{-1})_{\mu'}^{\mu} R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}(u) C_{\nu}^{\nu'}, \tag{3.108}$$

где $C = \sigma_x$.

В результате трансфер-матрица модели льда удовлетворяет соотношению кроссинг-симметрии:

$$T_{\beta_1 \ldots \beta_N}^{\alpha_1 \ldots \alpha_N}(u) = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}^{\beta_1 \ldots \beta_N}(\eta - u). \tag{3.109}$$

Вводя Q_L согласно формуле

$$Q_L(u) = Q_R^T(\eta - u), \tag{3.110}$$

где значок T означает транспонирование, мы приходим к уравнению

$$Q_L(u)T(u) = a^N Q_L(u + \eta + i\pi) + b^N Q_L(u - \eta - i\pi). \tag{3.111}$$

Прямой проверкой можно показать, что

$$Q_L(u)Q_R(v) = Q_L(v)Q_R(u). \tag{3.112}$$

Имеются некоторые доводы в пользу существования таких значений параметра u, что при произвольных r векторы ψ, отвечающие различным наборам $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$, порождают все 2^N-мерное пространство. Поэтому должны существовать такие значения параметра u, которые мы будем обозначать u_0, что матрицы $Q_R(u_0)$ и $Q_L(\eta - u_0)$ являются невырожденными.

Матрица, определяемая выражением

$$Q(u) = Q_R(u) Q_R^{-1}(u_0) \tag{3.113}$$

называется Q-оператором.

Из (3.112) следует, что также $Q(u) = Q_L^{-1}(u_0)Q_L(u)$. Домножая уравнение (3.107) справа на $Q_R^{-1}(u_0)$, а уравнение (3.111) слева на $Q_L^{-1}(u_0)$, получаем, что

$$T(u)Q(u) = a^N(u)Q(u + \eta + i\pi) + b^N(u - \eta - i\pi) = Q(u)T(u).$$

Кроме того,

$$Q(u)Q(v) = Q_L^{-1}(u_0)Q_L(u)Q_R(v)Q_R^{-1}(u_0) = \\ = Q_L^{-1}(u_0)Q_L(v)Q_R(u)Q_R^{-1}(u_0) = Q(v)Q(u).$$

Итак, для любых u и v имеют место равенства

$$[T(u), T(v)] = 0, \qquad [T(u), Q(v)] = 0, \qquad [Q(u), Q(v)] = 0$$

и

$$\Lambda(u)Q(u) = a^N(u)Q(u + \eta + i\pi) + b^N(u)Q(u - \eta - i\pi). \tag{3.114}$$

Из последнего уравнения и того обстоятельства, что функции $\Lambda(u)$ и $Q(u)$ целые, следует их вид. Поскольку целая функция $Q(u)$ периодична,

$$Q(u) = \prod_{i=1}^{N} \operatorname{sh}(u - u_i),$$

где u_i — неизвестные пока нули $Q(u)$.

Полагая в (3.114) $u = u_i$, получим следующие уравнения на u_j, $j = 1, \ldots, N$:

$$\frac{a^N(u_i)}{b^N(u_i)} = -\prod_{j=1}^{N} \frac{\operatorname{sh}(u_i - u_j - \eta - i\pi)}{\operatorname{sh}(u_i - u_j + \eta + i\pi)},$$

или

$$\left(\frac{\operatorname{sh}(\eta - u_i)}{\operatorname{sh}(u_i)}\right)^N = -\prod_{j=1}^{N} \frac{\operatorname{sh}(u_i - u_j - \eta - i\pi)}{\operatorname{sh}(u_i - u_j + \eta + i\pi)} = \\ = -\prod_{j=1, j\neq i} \frac{\operatorname{sh}(u_i - u_j - \eta)}{\operatorname{sh}(u_i - u_j + \eta)}.$$

Из полученных уравнений находятся u_j, $j = 1, \ldots, N$. После этого, зная $Q(u)$, можно вычислить собственные значения трансфер-матрицы $T(u)$:

$$\Lambda(u) = \frac{a^N(u)Q(u + \eta + i\pi) + b^N(u)Q(u - \eta - i\pi)}{Q(u)}.$$