Введение в когомологии пучков*

С.М. Львовский

НМУ, осень 1997

Предисловие

Эти записки более или менее соответствуют курсу «Введение в когомологии пучков», прочитанному автором в НМУ в осеннем семестре 1997 года. Соответствие между разделами текста и отдельными лекциями не является взаимно однозначным.

По сравнению с текстами, раздававшимися слушателям после занятий, добавлены записки заключительной лекции (разд. 9). Текст слегка отредактирован; исправлены некоторые ошибки, в том числе и те, на которые мне указали слушатели.

Практически вся теория, изложенная в лекциях, была создана французскими математиками в 50-е годы нашего столетия. Не претендуя на изложение истории вопроса, назовем четыре имени. Ж. Лере и А. Картан создали понятие пучка. Ж.-П. Серр, ориентируясь на работы Картана по ТФКП многих переменных, применил пучки и когомологии к алгебраической геометрии. Наконец, А. Гротендик систематизировал и далеко развил теорию пучков[1]. Бо́льшая часть нашего курса соответствует примерно половине основополагающей работы Серра [10].

Хочу выразить глубокую благодарность всем слушателям курса за внимание и чрезвычайно полезные замечания. Особенно ценную обратную связь я получал от С. Васильева, О. Попова и А. Черепанова.

Литература

[1] М. Атья, И. Макдональд. Введение в коммутативную алгебру. М., Мир, 1972.

[2] Н. Бурбаки. Гомологическая алгебра. М., Наука, 1987.

*При наборе использовался макропакет XY-pic.

[1] Список достижений названных замечательных математиков этим отнюдь не исчерпывается.

[3] С.И. Гельфанд, Ю.И. Манин. Методы гомологической алгебры. М., Наука, 1988.

[4] Р. Годеман. Алгебраическая топология и теория пучков. М., 1958.

[5] В.И. Данилов. Когомологии алгебраических многообразий. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления). Т. 35 (Алгебраическая геометрия-2). М., ВИНИТИ, 1989.

[6] С. Ленг. Алгебра. М., 1965.

[7] Д. Мамфорд. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М., Мир, 1966.

[8] Ю.И. Манин. Лекции по алгебраической геометрии 1966–1968 гг. Ротапринт мехмата МГУ, 1968.

[9] М. Рид. Алгебраическая геометрия для всех. М., Мир, 1991.

[10] Ж.-П. Серр. Алгебраические когерентные пучки. В кн.: Расслоенные пространства и их приложения. М., 1958, с. 372–458.

[11] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. М., Наука, 1989.

[12] И.Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. М., Наука, 1988.

1. Гомологии, гомотопии, конусы

Определение 1.1. Комплексом абелевых групп (векторных пространств, модулей над фиксированным кольцом, и т. п.) называется занумерованный целыми числами набор абелевых групп (векторных пространств, модулей ...) K^i и гомоморфизмов $d^i \colon K^i \to K^{i+1}$, удовлетворяющих условию $d^{i+1}d^i = 0$ для всех i.

Комплекс обозначается $K^{\cdot}$ (иногда точку, стоящую вместо «произвольного индекса», будем опускать). Комплекс называется *ограниченным снизу,* если $K^i = 0$ для всех $i \ll 0$, и *ограниченным сверху,* если $K^i = 0$ для всех $i \gg 0$. Комплекс, содержащий лишь конечное число ненулевых членов, называется *ограниченным.*

Определение 1.2. Гомоморфизмом (или попросту морфизмом) комплексов $f \colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ называется последовательность гомоморфизмов $f^i \colon K^i \to L^i$ такая, что $d^i f^i = f^{i+1} d^i$ для всех i (обычно пишут короче: $df = fd$).

Определение 1.3. Если $K^{\cdot}$ — комплекс, то его i-той группой когомологий называют факторгруппу (фактормодуль ...) $\operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$. Обозначают i-тую группу когомологий так: $H^i(K^{\cdot})$.

Задача 1.4. Пусть
$$0 \to K^{\cdot} \to L^{\cdot} \to M^{\cdot} \to 0$$
— точная последовательность комплексов. Докажите, что она индуцирует точную последовательность когомологий
$$\dots \to H^i(K^{\cdot}) \to H^i(L^{\cdot}) \to H^i(M^{\cdot}) \to H^{i+1}(K^{\cdot}) \to H^{i+1}(L^{\cdot}) \to \dots . \tag{1.1}$$

Замечание 1.5. Иногда пишут индексы снизу, требуют, чтобы d действовало из K_i в K_{i-1}, и называют такие комплексы цепными (а комплексы, о которых у нас шла речь в начале, тогда называют коцепными). Удобно не считать цепной комплекс отдельным понятием, а просто иметь в виду, что всякий комплекс можно записать и с нижними индексами, полагая $K_i = K^{-i}$ и $H_i(K_{\cdot}) = H^{-i}(K^{\cdot})$.

Пусть $K^{\cdot}$ и $L^{\cdot}$ — два комплекса. Существует тривиальный способ сконструировать гомоморфизм из $K^{\cdot}$ в $L^{\cdot}$. Именно, пусть $s^i \colon K^i \to L^{i-1}$ — произвольная последовательность гомоморфизмов. Положим $\varphi^i = d^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i$ (в более вольной записи: $\varphi = ds + sd$). Легко видеть, что последовательность $\{\varphi^i\}$ является гомоморфизмом комплексов из $K^{\cdot}$ в $L^{\cdot}$.

Определение 1.6. Гомоморфизмы комплексов, полученные вышеописанной конструкцией, называются *гомотопически тривиальными.* Если f и g — гомоморфизмы из комплекса $K^{\cdot}$ в комплекс $L^{\cdot}$ и разность $f-g$ гомотопически тривиальна, то гомоморфизмы f и g называются *гомотопными.*

Пример 1.7. Пусть X и Y — топологические пространства, $f, g\colon X \to Y$ — гомотопные непрерывные отображения. Тогда индуцированные отображения сингулярных цепных (или коцепных) комплексов будут гомотопны (см. [11, с. 97–98]).

Задача 1.8. Покажите, что гомотопные гомоморфизмы из $K^{\cdot}$ в $L^{\cdot}$ индуцируют совпадающие гомоморфизмы из $H^i(K^{\cdot})$ в $H^i(L^{\cdot})$.

Задача 1.9. Пусть $\varphi\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ — гомотопически тривиальный гомоморфизм. Покажите что $\varphi \circ f$ и $g \circ \varphi$ гомотопически тривиальны, где f и g — произвольные гомоморфизмы в $K^{\cdot}$ (соответственно, из $L^{\cdot}$).

Определение 1.10. Комплексы $K^{\cdot}$ и $L^{\cdot}$ называются *гомотопически эквивалентными,* если существуют гомоморфизмы $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ и $g\colon L^{\cdot} \to K^{\cdot}$ такие, что fg и gf гомотопны тождественным отображениям. Комплекс называется *стягиваемым,* если он гомотопически эквивалентен нулевому (т. е. комплексу, состоящему из одних нулей).

Определение 1.11. Точные последовательности

$$0 \to E_1 \to F_1 \to G_1 \to 0$$

и

$$0 \to E_2 \to F_2 \to G_2 \to 0$$

называются *изоморфными,* если существует их можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{1.2}$$

в которой вертикальные стрелки являются изоморфизмами.

Задача 1.12. Докажите, что в определении 1.11 достаточно потребовать, чтобы изоморфизмами были крайняя левая и правая стрелки.

Определение 1.13. Короткая точная последовательность

$$0 \to E \to F \to G \to 0 \tag{1.3}$$

называется расщепляющейся, если она изоморфна точной последовательности вида

$$0 \to E \xrightarrow{u} E \oplus G \xrightarrow{v} G \to 0,$$

где $u\colon e \mapsto e \oplus 0$ и $v\colon e \oplus g \mapsto g$.

Задача 1.14. Рассмотрим короткую точную последовательность (1.3) как комплекс (в этом и подобных случаях подразумевается, что слева и справа дописана бесконечная последовательность нулей). Докажите, что этот комплекс стягиваем тогда и только тогда, когда точная последовательность (1.3) расщепляется.

Задача 1.15. Перечислите все неизоморфные друг другу точные последовательности абелевых групп вида

$$0 \to \mathbb{Z} \to X \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 0.$$

А что будет, если заменить $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Определение 1.16. Гомоморфизм комплексов $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ называется *квазиизоморфизмом,* если он индуцирует изоморфизмы $H^i(K^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} H^i(L^{\cdot})$ для всех i. Комплекс $K^{\cdot}$ называется *ацикличным,* если $H^i(K^{\cdot}) = 0$ для всех i.

Из задачи 1.8 ясно, что всякая гомотопическая эквивалентность является квазиизоморфизмом и всякий стягиваемый комплекс ацикличен.

Задача 1.17. Докажите, что всякий ацикличный комплекс векторных пространств стягиваем.

Задача 1.18. Приведите пример ацикличного, но не стягиваемого комплекса абелевых групп; приведите также пример квазиизоморфизма, не являющегося гомотопической эквивалентностью.

Конусы

Простейшая операция с комплексами — сдвиг.

Определение 1.19. Пусть K — комплекс и t — целое число. Комплекс $K[t]$ определяется так:

$$K[t]^i = K^{t+i}; \qquad d^i_{K[t]} = (-1)^t d^{t+i}_K.$$

Если $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ — гомоморфизм комплексов, то тот же самый набор гомоморфизмов $f^i\colon K^i \to L^i$ будет гомоморфизмом из $K[t]$ в $L[t]$; иногда этот гомоморфизм будет для ясности обозначаться $f[t]\colon K[t] \to L[t]$ (у каждой стрелки должны быть однозначно определенные начало и конец!).

Менее тривиально определяется такая важная операция над комплексами, как конус морфизма.

Определение 1.20. Пусть $f\colon K \to L$ — гомоморфизм комплексов. Его *конусом* называется комплекс $C(f)$, определенный так:

$$C(f)^i = K^{i+1} \oplus L^i;$$
$$d^i_{C(f)}(k; l) = (-dk; fk + dl).$$

Работая с конусами, удобно гомоморфизмы из $A \oplus B$ в $C \oplus D$ записывать в виде матриц $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right)$, где $u \in \mathrm{Hom}(A, C)$, $v \in \mathrm{Hom}(B, C)$, $w \in \mathrm{Hom}(A, D)$, $z \in \mathrm{Hom}(B, D)$. При такой записи умножение матриц соответствует композиции гомоморфизмов. В частности, дифференциал в конусе морфизма $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ запишется в виде матрицы $\begin{pmatrix} -d_K & 0 \\ f & d_L \end{pmatrix}$.

Задача 1.21. Проверьте, что конус морфизма — действительно комплекс.

Пример 1.22. Для клеточного пространства (CW-комплекса) X обозначим через $C_{\cdot}(X)$ цепной комплекс, предназначенный для «клеточного» вычисления сингулярных гомологий X ([11, с. 109–110]). Далее, если (X, x_0) — клеточное пространство с отмеченной точкой (подразумевается, что x_0 является нульмерной клеткой), то положим $\tilde{C}_{\cdot}(X, x_0) = C_{\cdot}(X)/C_{\cdot}(x_0)$ (это — *приведенный клеточный комплекс* пространства (X, x_0)).

Пусть теперь $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ — клеточное отображение клеточных пространств с отмеченной точкой, и пусть $C(f)$ — приведенный конус отображения f, получающийся из обычного конуса ([11, с. 22]) стягиванием «образующей», содержащей отмеченную точку. Тогда приведенный клеточный комплекс $\tilde{C}_{\cdot}(C(f))$ изоморфен конусу естественного отображения $f_*\colon \tilde{C}_{\cdot}(X, x_0) \to \tilde{C}_{\cdot}(Y, y_0)$.

Задача 1.23. Проверьте, что отображения $g\colon l \mapsto (0; l)$ и $h\colon (k, l) \mapsto -k$ являются гомоморфизмами из L в $C(f)$ и из $C(f)$ в $K[1]$ соответственно[2].

Задача 1.24. Покажите, что гомоморфизмы f, g и h индуцируют точную последовательность

$$\cdots \to H^i(K^{\cdot}) \xrightarrow{f_*} H^i(L^{\cdot}) \xrightarrow{g_*} H^i(C(f)^{\cdot}) \xrightarrow{h_*} H^{i+1}(K^{\cdot}) \xrightarrow{f_*} H^{i+1}(L^{\cdot}) \to \dots. \tag{1.4}$$

Задача 1.25. Покажите, что конус тождественного гомоморфизма стягиваем (то есть гомотопически эквивалентен нулевому комплексу).

Задача 1.26. Пусть

$$0 \to K^{\cdot} \xrightarrow{i} L^{\cdot} \to M^{\cdot} \to 0$$

[2]В первой версии записок здесь был перепутан знак у морфизма h.

— точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс $M^{\cdot}$ квазиизоморфен конусу $C(i)$; покажите также, что при этом квазиизоморфизме точная последовательность (1.1) переходит в точную последовательность (1.4). Таким образом, конус морфизма является обобщением понятия «факторкомплекс».

2. Предпучки и пучки

Определение пучка удобно давать в два этапа.

Определение 2.1. Говорят, что $\mathcal{F}$ — *предпучок* абелевых групп (векторных пространств, колец …) на топологическом пространстве X, если каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлена абелева группа (векторное пространство …) $\mathcal{F}(U)$, а каждой паре содержащихся друг в друге открытых множеств $V \subset U$ — гомоморфизм $\rho_V^U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ (отображения ограничения), и при этом выполнено следующее условие:

Если $W \subset V \subset U$, то $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.

Если $s \in \mathcal{F}(U)$ и $V \subset U$, то вместо $\rho_V^U(s)$ обычно пишут $s|_V$ («ограничение s на V»). Элементы множества $\mathcal{F}(U)$ называются *сечениями* предпучка $\mathcal{F}$ над U.

Приведем примеры предпучков (незнакомые с алгебраической геометрией могут пока пропустить примеры, в которых участвуют алгебраические многообразия; в примере 3 можно также заменить слова «неособое алгебраическое многообразие» на «риманова поверхность» и «рациональная функция» на «мероморфная функция»).

1а. X произвольно, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо непрерывных функций на U со значениями в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

1б. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо гладких функций на U со значениями в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

1в. X — комплексно-аналитическое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо голоморфных функций на U.

1г. X — алгебраическое многообразие, снабженное топологией Зариского, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо рациональных функций на X, определенных всюду на U.

2а. X произвольно, E — векторное расслоение на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство сечений расслоения E над U.

2б. X — гладкое многообразие, E — векторное расслоение на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство гладких сечений расслоения E над U.