— точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс $M^{\cdot}$ квазиизоморфен конусу $C(i)$; покажите также, что при этом квазиизоморфизме точная последовательность (1.1) переходит в точную последовательность (1.4). Таким образом, конус морфизма является обобщением понятия «факторкомплекс».

2. Предпучки и пучки

Определение пучка удобно давать в два этапа.

Определение 2.1. Говорят, что $\mathcal{F}$ — *предпучок* абелевых групп (векторных пространств, колец ...) на топологическом пространстве X, если каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлена абелева группа (векторное пространство ...) $\mathcal{F}(U)$, а каждой паре содержащихся друг в друге открытых множеств $V \subset U$ — гомоморфизм $\rho_V^U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ (отображения ограничения), и при этом выполнено следующее условие:

Если $W \subset V \subset U$, то $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$.

Если $s \in \mathcal{F}(U)$ и $V \subset U$, то вместо $\rho_V^U(s)$ обычно пишут $s|_V$ («ограничение s на V»). Элементы множества $\mathcal{F}(U)$ называются *сечениями* предпучка $\mathcal{F}$ над U.

Приведем примеры предпучков (незнакомые с алгебраической геометрией могут пока пропустить примеры, в которых участвуют алгебраические многообразия; в примере 3 можно также заменить слова «неособое алгебраическое многообразие» на «риманова поверхность» и «рациональная функция» на «мероморфная функция»).

1а. X произвольно, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо непрерывных функций на U со значениями в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

1б. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо гладких функций на U со значениями в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

1в. X — комплексно-аналитическое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо голоморфных функций на U.

1г. X — алгебраическое многообразие, снабженное топологией Зарисского, $\mathcal{F}(U)$ — кольцо рациональных функций на X, определенных всюду на U.

2а. X произвольно, E — векторное расслоение на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство сечений расслоения E над U.

2б. X — гладкое многообразие, E — векторное расслоение на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство гладких сечений расслоения E над U.

2б$'$. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — пространство дифференциальных форм степени t на U.

2б$''$. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — пространство замкнутых дифференциальных форм степени t на U.

2б$'''$. X — гладкое многообразие, $\mathcal{F}(U)$ — пространство точных дифференциальных форм степени t на U.

2в. X — комплексно-аналитическое многообразие, E — векторное расслоение на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство голоморфных сечений расслоения E над U.

3. X — неособое алгебраическое многообразие, снабженное топологией Зарисского, D — дивизор на X, $\mathcal{F}(U)$ — пространство таких рациональных функций f на X, что $(f) + D \geqslant 0$ на U.

4. X — алгебраическое многообразие, снабженное топологией Зарисского, $Y \subset X$ — замкнутое по Зарисскому подмножество, $\mathcal{F}(U)$ состоит из регулярных функций на U, тождественно обращающихся в нуль на $U \cap Y$.

5. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(U)$ — множество обобщенных функций на U.

6. X произвольно; для всех непустых U имеем $\mathcal{F}(U) = G$, где G — фиксированная абелева группа, $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$, отображения ограничения на непустое множество тождественны.

Пучками называются предпучки, у которых глобальные свойства сечений определяются локальными. Точнее говоря:

Определение 2.2. Предпучок $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *пучком,* если он удовлетворяет следующим условиям. Во-первых, $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$, а во-вторых (и в главных), пусть $U \subset X$ — открытое подмножество, $U = \bigcup U_i$ — его открытое покрытие. Для всякого набора $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ такого, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ для всех i и j, существует и единственно такое $s \in \mathcal{F}(U)$, что $s|_{U_i} = s_i$ для всех i.

Задача 2.3. Докажите, что во всех вышеприведенных примерах, кроме 2б$'''$ и 6, предпучки являются пучками.

Пучки из примеров 1 а–г называются *структурными пучками.*

Напомним, что топологическое пространство называется *неприводимым,* если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

- всякое непустое открытое подмножество в X всюду плотно в X
- X не является объединением двух своих собственных замкнутых подмножеств.

Хаусдорфово пространство неприводимо тогда и только тогда, когда состоит из одной точки; содержательные примеры неприводимых пространств дает топология Зарисского (см. ниже).

Задача 2.4. Докажите, что предпучок из примера 6 является пучком тогда и только тогда, когда пространство X неприводимо.

Задача 2.5. Докажите, что предпучок из примера 2б‴ не является пучком, если $H^t(X,\mathbb{R}) \neq 0$.

Решение. Пусть ω — замкнутая, но не точная t-форма на X. По лемме Пуанкаре найдется такое открытое покрытие $X = \bigcup U_i$, что все формы $\omega_i = \omega|_{U_i}$ точны. Ясно, что $\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_i \cap U_j}$, однако точной формы, ограничение которой на каждое U_i совпадает с ω_i, не существует: таковой формой может быть только ω, а она неточна. $\square$

Гомоморфизмы предпучков и пучков определяются естественным образом:

Определение 2.6. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — предпучки (в том числе пучки) на пространстве X, то гомоморфизмом $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется набор гомоморфизмов $f_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ для каждого открытого $U \subset X$, коммутирующих с отображениями ограничения (подробнее: $f_U(s)|_V = f_V(s|_V)$, как только $V \subset U$).

Ядро, коядро и образ гомоморфизма *пред*пучков определяются бесхитростно:

Определение 2.7. Пусть $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм предпучков. Тогда ядром (соответственно, коядром, образом) гомоморфизма f называется предпучок $U \mapsto \operatorname{Ker}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$ (соответственно: $U \mapsto \operatorname{Coker}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$, $U \mapsto \operatorname{Im}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$).

Задача 2.8. Доработайте это определение: определите отображения ограничения и убедитесь, что аксиомы предпучка выполнены.

Поскольку всякий пучок является предпучком, можно попытаться применить определение 2.7 и к пучкам. С ядром все проходит гладко:

Задача 2.9. Пусть $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм пучков. Докажите, что предпучок $\operatorname{Ker} f$ является пучком.

С коядром и образом, однако же, этот номер не проходит. В самом деле, пусть, как в примере 2б″, Ω^m_X — пучок дифференциальных m-форм на дифференцируемом многообразии X ($\Omega^m_X(U)$ — пространство m-форм на открытом множестве $U \subset X$); пусть $d\colon \Omega^{m-1}_X \to \Omega^m_X$ — гомоморфизм, задаваемый внешним дифференцированием. Как мы видели в задаче 2.5, предпучок $\operatorname{Im} d$ быть пучком не обязан. Вот другой аналогичный пример.

Задача 2.10. Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Рассмотрим на $\mathbb{C}$ пучок $\mathcal{O}^*$, определенный следующим образом: $\mathcal{O}^*(U)$ — множество голоморфных функций на U, нигде не обращающихся в нуль (групповая операция — умножение). Пусть $\varphi\colon \mathcal{O}^* \to \mathcal{O}^*$ — гомоморфизм, переводящий сечение (то бишь голоморфную функцию) f в f^n, где $n > 1$ — фиксированное целое число. Покажите, что предпучок $\operatorname{Im}\varphi$ не является пучком.

Указание. Из всякой ли голоморфной функции можно извлечь корень n-ой степени?

Итак, наивные определения коядра и образа доказали свою непригодность: по этим определениям из пучков могут получиться предпучки, не являющиеся пучками, между тем как для приложений важны именно пучки. Стало быть, приходится встать на более формальную точку зрения.

Определение 2.11. Ядром гомоморфизма пучков $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется пара $(\mathcal{K}, i)$, где $\mathcal{K}$ — пучок и $i\colon \mathcal{K} \to \mathcal{F}$ — гомоморфизм, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f \circ i = 0$;

2) если $i'\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{F}$ — такой гомоморфизм, что $f \circ i' = 0$, то существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$, удовлетворяющий условию $i' = i \circ \varphi$ (см. диаграмму):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}' \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "i'"] & & \\
\mathcal{K} \arrow[r, "i"] & \mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G}.
\end{tikzcd}$$

Иногда ядром называют сам пучок $\mathcal{K}$ или сам гомоморфизм i.

Определение 2.12. Коядром гомоморфизма пучков $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется пара $(\mathcal{C}, j)$, где $\mathcal{C}$ — пучок и $j\colon \mathcal{G} \to \mathcal{C}$ — гомоморфизм, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $j \circ f = 0$;

2) если $j'\colon \mathcal{G} \to \mathcal{C}'$ –такой гомоморфизм, что $j' \circ f = 0$, то существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, удовлетворяющий условию $j' = \psi \circ j$ (см. диаграмму):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j'"] & \mathcal{C} \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
& & \mathcal{C}'.
\end{tikzcd}$$

Иногда коядром называют сам пучок $\mathcal{C}$ или сам гомоморфизм j.

Из определений очевидно, что ядро и коядро гомоморфизма пучков определено однозначно с точностью до изоморфизма (если оно существует).

Образ гомоморфизма «по-научному» определяется так:

Определение 2.13. Образом гомоморфизма пучков $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется ядро его коядра.

Задача 2.14. Заменим всюду в определениях 2.11, 2.12 и 2.13 слово «пучок» на слово «модуль»; покажите, что получающиеся определения эквивалентны обычным определениям ядра, коядра и образа гомоморфизма модулей. Покажите, что, если заменить в тех же определениях слово «пучок» на «предпучок», то получающиеся определения будут эквивалентны определению 2.7.

Задача 2.15. Докажите, что ядро гомоморфизма пучков, определенное как в задаче 2.9, удовлетворяет условиям определения 2.11.

Итак, ядро гомоморфизма пучков всегда существует (и тем самым определено однозначно). Коядро у любого гомоморфизма пучков также существует, но для его построения нам потребуется некоторая подготовка. Начнем со следующего важного определения:

Определение 2.16. Пусть $\mathcal{F}$ — (пред)пучок на пространстве X, и пусть $x \in X$. Определим на множестве пар (s, U), где $U \subset X$ — открытое подмножество, содержащее x, и $s \in \mathcal{F}(U)$, такое отношение эквивалентности: $(s_1, U_1) \sim (s_2, U_2)$, если ограничения s_1 и s_2 на некоторое открытое подмножество $V \subset U_1 \cap U_2$, содержащее x, совпадают. Множество классов эквивалентности по этому отношению называется *слоем* (пред)пучка $\mathcal{F}$ в точке x.

Слой (пред)пучка $\mathcal{F}$ в точке x обозначается $\mathcal{F}_x$. Элементы $\mathcal{F}_x$ называются *ростками* $\mathcal{F}$ в точке x.

Задача 2.17. Докажите, что слой структурного пучка n-мерного неособого комплексного многообразия (в любой точке) изоморфен кольцу сходящихся степенных рядов от n переменных.

Следующий шаг в построении коядер — определить для каждого предпучка «наиболее близкий к нему» пучок.

Именно, по произвольному предпучку $\mathcal{F}$ на пространстве X определим пучок $\mathcal{F}_+$ следующим образом. Сечение $\mathcal{F}_+$ над открытым подмножеством $U \subset X$ представляет собой семейство ростков $\sigma_x \in \mathcal{F}_x$, удовлетворяющее такому условию «непрерывности»: для всякой точки $x \in U$ существует такое открытое подмножество $V \subset U$, содержащее x, и такое сечение $s \in \mathcal{F}(V)$, что σ_y совпадает с ростком сечения s в точке y для всех $y \in V$. Отображения ограничения строятся очевидным образом.

Задача 2.18. Проверьте, что предпучок $\mathcal{F}_+$ всегда является пучком.

Пучок $\mathcal{F}_+$ называется *пучком, ассоциированным с предпучком* $\mathcal{F}$. По-английски операция перехода от $\mathcal{F}$ к $\mathcal{F}_+$ называется sheafication.

Задача 2.19. Пусть $\mathcal{F}$ — постоянный предпучок со слоем G, где G — абелева группа. Опишите, как устроены группы сечений $\mathcal{F}_+(U)$.

Пучок, ассоциированный с постоянным предпучком со слоем G, называется *постоянным пучком* и обозначается $\underline{G}$ или, если нет опасности путаницы, просто G.

Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок и $\mathcal{F}_+$ — ассоциированный с ним пучок. Построим канонический гомоморфизм $a\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}_+$ следующим образом: если $s \in \mathcal{F}(U)$, то $a(s)$ — семейство $\{s_x \in \mathcal{F}_x\}_{x \in U}$, в котором каждое s_x является ростком сечения s в точке x.

Задача 2.20. Покажите, что гомоморфизм a является изоморфизмом тогда и только тогда, когда предпучок $\mathcal{F}$ является пучком.

Задача 2.21. Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок, $\mathcal{G}$ — пучок на пространстве X. Покажите, что отображение $f \mapsto f \circ a$, где a — канонический гомоморфизм из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}_+$, задает изоморфизм между $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_+, \mathcal{G})$ и $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Замечание 2.22. На категорном языке (см. [3]) результат предыдущей задачи звучит так: функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_+$ из категории предпучков в категорию пучков сопряжен слева «забывающему функтору» из категории пучков в категорию предпучков (по определению, забывающий функтор ставит в соответствие данному пучку $\mathcal{G}$ его же, рассматриваемого как предучок).

Теперь мы можем построить коядро гомоморфизма пучков. Пусть $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм пучков, и пусть $j_0\colon \mathcal{G} \to \mathcal{M}$ — коядро f как гомоморфизма *пред*пучков (таковое существует в силу задачи 2.14). Пусть, далее, $\mathcal{C}$ — предпучок, ассоциированный с $\mathcal{M}$, и $j = a \circ j_0$, где $a\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ — канонический гомоморфизм.

Задача 2.23. Докажите, что пара $(\mathcal{C}, j)$ является коядром гомоморфизма f.

Решение. Пусть $j'\colon \mathcal{G} \to \mathcal{C}'$ — такой гомоморфизм пучков, что $j' \circ f = 0$. Поскольку всякий пучок является предпучком и пара $(\mathcal{M}, j_0)$ является коядром f как гомоморфизма предпучков, существует единственный гомоморфизм $\psi_0\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}'$, для которого $j' = \psi_0 \circ j_0$;

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r, "j_0"] \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, "j"] & \mathcal{M} \arrow[d, "a"] \arrow[dl, dashed, "\psi_0"'] \\
& \mathcal{C}' & \mathcal{C} \arrow[l, dashed, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

в силу задачи 2.21 существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, для которого $\psi \circ a = j$. Ясно, что гомоморфизм ψ — именно тот, существование которого требуется по определению коядра. $\square$

Если $\mathcal{F}$ — предпучок на пространстве X, то, по определению, $\mathcal{G}$ является его подпредпучком, если $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ при всех U и отображения ограничения из $\mathcal{F}(U)$ в $\mathcal{F}(V)$ отображают $\mathcal{G}(U)$ в $\mathcal{G}(V)$. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки, то говорят, что $\mathcal{G}$ — *подпучок* пучка $\mathcal{F}$.

Определение 2.24. Пусть $\mathcal{G}$ — подпучок пучка $\mathcal{F}$; *факторпучком* $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ называется коядро естественного гомоморфизма $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$.

Задача 2.25. Покажите, что факторпучок $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ изоморфен пучку, ассоциированному с предпучком $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$.

Коль скоро ядра и коядра всегда существуют, у всякого гомоморфизма пучков существует и образ (см. определение 2.13).

Задача 2.26. Докажите, что образ гомоморфизма пучков $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ изоморфен пучку, ассоциированному с предпучком $U \mapsto (\operatorname{Im}(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$.

Задача 2.27. Покажите, что образ гомоморфизма f пучков изоморфен коядру ядра f («теорема о гомоморфизме!»).

Чтобы у вас не создалось впечатления, что мы всего лишь нудно доказываем очевидные вещи, рассмотрим следующий пример. Повторим определения 2.11, 2.12 и 2.13, заменив в них всюду слово «пучок» на «коммутативная хаусдорфова топологическая группа» (под гомоморфизмами будем понимать непрерывные гомоморфизмы).

Задача 2.28. Покажите, что всякий гомоморфизм коммутативных хаусдорфовых топологических групп обладает ядром и коядром (Ответ: ядро — такое же, как получается при наивном определении, коядро — фактор по замыканию образа).

Задача 2.29. Пусть $A = \mathbb{R}$, $B = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$, и $f\colon A \to B$ — обмотка тора: $x \mapsto (x, x\sqrt{2}) \bmod (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$. Покажите, что $\operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f)$ неизоморфно $\operatorname{Im} f$.

Как видите, для хаусдорфовых коммутативных топологических групп теорема о гомоморфизме неверна. По-ученому говоря, категория пучков (так же, как и категория модулей) является абелевой категорией, а категория хаусдорфовых коммутативных топологических групп — нет. См. по этому поводу книгу [3].

Наконец, дадим определение точной последовательности пучков. Оно дословно совпадает с тем, к чему мы привыкли для модулей:

Определение 2.30. Последовательность пучков и гомоморфизмов

$$\ldots \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{g} \mathcal{F}_3 \to \ldots$$

называется *точной в члене* $\mathcal{F}_2$, если $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ как подпучки пучка $\mathcal{F}_2$.

Задача 2.31. Покажите, что последовательность пучков на пространстве X и гомоморфизмов

$$\ldots \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{g} \mathcal{F}_3 \to \ldots$$

точна в члене $\mathcal{F}_2$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$ точна в члене $(\mathcal{F}_2)_x$ последовательность слоев

$$\ldots \to (\mathcal{F}_1)_x \xrightarrow{f} (\mathcal{F}_2)_x \xrightarrow{g} (\mathcal{F}_3)_x \to \ldots .$$

Задача 2.32. Пусть X — комплексное многообразие (риманова поверхность, например), $\mathcal{O}_X$ — пучок голоморфных функций (пример 1в), $\mathcal{O}_X^*$ — пучок голоморфных функций, не обращающихся в нуль (задача 2.10), $\mathbb{Z}$ — постоянный пучок со слоем $\mathbb{Z}$. Покажите, что существует точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X^* \to 0,$$

в которой гомоморфизм φ переводит функцию f в $e^{2\pi i f}$.

Вот венец наших рассуждений с ядрами, коядрами и точными последовательностями:

Задача 2.33. Проверьте, что все результаты первого раздела остаются в силе, если в определении комплекса, гомотопии и т. п. слово «абелева группа» заменить на «пучок абелевых групп» (упражняйтесь, пока общий принцип не станет вам ясен).

Если $\mathcal{F}$ — пучок на пространстве X, то группа $\mathcal{F}(X)$ (группа глобальных сечений) обозначается еще $\Gamma(\mathcal{F})$ (или $\Gamma(X, \mathcal{F})$, если необходимо подчеркнуть, на каком пространстве определен пучок $\mathcal{F}$). Другое обозначение для той же самой группы: $H^0(X, \mathcal{F})$ или $H^0(\mathcal{F})$ («нулевая группа когомологий»).

Задача 2.34. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пучков на пространстве X. Покажите, что индуцированная последовательность групп сечений

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_3) \tag{2.1}$$

также точна.

Задача 2.35. Покажите на примере, что точную последовательность (2.1) не всегда можно дополнить нулем справа, не нарушая точности (иными словами, эпиморфизм пучков не обязательно индуцирует эпиморфизм глобальных сечений).

Указание. Поищите примеры среди разобранных в этом разделе.

Теория когомологий пучков занимается, грубо говоря, тем, что измеряет неточность последовательностей 2.1.

3. Примеры из алгебраической геометрии

Напоминания

Напомним некоторые определения из элементарной алгебраической геометрии (по поводу подробностей и доказательств см. [9, 12]).

Зафиксируем алгебраически замкнутое поле k. Множество всех упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$, где все x_j принадлежат k, называется *n-мерным аффинным пространством* над полем k и обозначается $\mathbb{A}^n$. Множества вида $\{ x \in \mathbb{A}^n \mid f_\alpha(x) = 0 \quad \text{для всех } \alpha \}$, где $\{f_\alpha\}$ — набор многочленов от n переменных, называются замкнутыми подмножествами $\mathbb{A}^n$. Такое понимание слова «замкнутое множество» вводит на $\mathbb{A}^n$ топологию (нехаусдорфову, если $n > 0$); она называется *топологией Зарисского.*

Топологическое пространство X называется *неприводимым,* если его нельзя представить в виде объединения двух отличных от X замкнутых подмножеств.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — замкнутое подмножество и $R = k[T_1, \ldots, T_n]$ — кольцо многочленов. Положим

$$I_X = \{ f \in R \mid f(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in X \}.$$

I_X является идеалом в кольце R. Множество X неприводимо тогда и только тогда, когда идеал I_X прост, или, эквивалентно, кольцо R/I_X не имеет делителей нуля. Это кольцо обозначается еще $k[X]$; если назвать регулярной функцией на X функцию из X в k, являющуюся ограничением с $\mathbb{A}^n$ функции, задаваемой многочленом, то $k[X]$ — кольцо регулярных функций на X.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — замкнутое подмножество, $A = k[X]$. Для всякого идеала $I \subset A$ положим $V(I) = \{ x \in X \mid f(x) = 0 \quad \text{для всех } f \in I \}$. Соответствие $I \mapsto V(I)$ обладает следующими свойствами:

- $V(I) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $I = R$;
- если $f \in A$ обращается в нуль во всех точках $x \in V(I)$ тогда и только тогда, когда $f^m \in I$ для некоторого m.