Задача 2.35. Покажите на примере, что точную последовательность (2.1) не всегда можно дополнить нулем справа, не нарушая точности (иными словами, эпиморфизм пучков не обязательно индуцирует эпиморфизм глобальных сечений).

Указание. Поищите примеры среди разобранных в этом разделе.

Теория когомологий пучков занимается, грубо говоря, тем, что измеряет неточность последовательностей 2.1.

3. Примеры из алгебраической геометрии

Напоминания

Напомним некоторые определения из элементарной алгебраической геометрии (по поводу подробностей и доказательств см. [9, 12]).

Зафиксируем алгебраически замкнутое поле k. Множество всех упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$, где все x_j принадлежат k, называется *n-мерным аффинным пространством* над полем k и обозначается $\mathbb{A}^n$. Множества вида $\{\, x \in \mathbb{A}^n \mid f_\alpha(x) = 0 \quad \text{для всех } \alpha \,\}$, где $\{f_\alpha\}$ — набор многочленов от n переменных, называются замкнутыми подмножествами $\mathbb{A}^n$. Такое понимание слова «замкнутое множество» вводит на $\mathbb{A}^n$ топологию (нехаусдорфову, если $n > 0$); она называется *топологией Зарисского.*

Топологическое пространство X называется *неприводимым,* если его нельзя представить в виде объединения двух отличных от X замкнутых подмножеств.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — замкнутое подмножество и $R = k[T_1, \ldots, T_n]$ — кольцо многочленов. Положим

$$I_X = \{\, f \in R \mid f(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in X \,\}.$$

I_X является идеалом в кольце R. Множество X неприводимо тогда и только тогда, когда идеал I_X прост, или, эквивалентно, кольцо R/I_X не имеет делителей нуля. Это кольцо обозначается еще $k[X]$; если назвать регулярной функцией на X функцию из X в k, являющуюся ограничением с $\mathbb{A}^n$ функции, задаваемой многочленом, то $k[X]$ — кольцо регулярных функций на X.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — замкнутое подмножество, $A = k[X]$. Для всякого идеала $I \subset A$ положим $V(I) = \{\, x \in X \mid f(x) = 0 \quad \text{для всех } f \in I \,\}$. Соответствие $I \mapsto V(I)$ обладает следующими свойствами:

- $V(I) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $I = R$;
- если $f \in A$ обращается в нуль во всех точках $x \in V(I)$ тогда и только тогда, когда $f^m \in I$ для некоторого m.

Утверждения «тогда» в обоих случаях тривиальны, утверждения «только тогда» составляют содержание так называемой теоремы Гильберта о нулях [1, 9].

Топология Зарисского на $\mathbb{A}^n$ индуцирует топологию Зарисского на всяком замкнутом подмножестве $X \subset \mathbb{A}^n$. Для всякого $f \in k[X]$ положим $D(f) = \{\, x \in X \mid f(x) \neq 0 \,\}$. Подмножества $D(f) \subset X$ открыты и образуют базу топологии Зарисского на X.

Всякое замкнутое (в топологии Зарисского — не будем всякий раз это оговаривать) подмножество $X \subset \mathbb{A}^n$ можно единственным образом представить в виде конечного объединения $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$, где все X_i замкнуты, неприводимы и не содержатся одно в другом.

Пусть теперь X — неприводимое замкнутое подмножество в аффинном пространстве. Построим на X пучок колец[3]. Для этого рассмотрим поле частных кольца X; это поле обозначается $k(X)$ и называется *полем рациональных функций* на X. Если $\varphi \in k(X)$ — рациональная функция и $x \in X$, то будем говорить, что φ *определена в точке* x, если существуют такие функции $f, g \in k[X]$, что $\varphi = f/g$ и $g(x) \neq 0$. Если теперь $U \subset X$ — открытое подмножество, то обозначим через $\mathcal{O}_X(U)$ множество рациональных функций (то есть элементов поля $k(X)$), определенных во всех точках $x \in U$. Соответствие $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ с естественными отображениями ограничения является, очевидно, пучком. Этот пучок обозначается $\mathcal{O}_X$ и называется *структурным пучком* X.

Задача 3.1. Докажите, что $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k[X]$.

Решение. Из самого определения ясно, что $k[X] \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Пусть, напротив, $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. По условию, это означает, что $\varphi \in k(X)$ и что для всякого $x \in X$ существуют такие $f_x, g_x \in k[X]$, что $\varphi = f_x/g_x$ и $g_x(x) \neq 0$. Стало быть, система уравнений $\{g_x = 0\}_{x \in X}$ несовместна; по теореме Гильберта о нулях отсюда следует, что функции g_x порождают единичный идеал в кольце $k[X]$, то есть что существуют точки $x_1, \dots, x_m \in X$ и функции $h_1, \dots, h_m \in k[X]$ такие, что

$$1 = h_1 g_{x_1} + \dots + h_m g_{x_m}.$$

Умножим обе части этого равенства на φ. Поскольку $\varphi \cdot g_{x_i} = f_{x_i}$, получаем, что

$$\varphi = h_1 f_{x_1} + \dots + h_m f_{x_m}.$$

Правая часть этого равенства лежит в $k[X]$, что и требовалось. $\square$

«Разбиение единицы», примененное в этом рассуждении, изобретено Серром.

[3] За счет небольшого технического усложнения аналогичный пучок можно построить, не предполагая неприводимости X. Нам с этой конструкцией иметь дело тоже придется, но чуть погодя.

Задача 3.2. В условиях предыдущей задачи пусть $f \in k[X]$. Покажите, что $\mathcal{O}_X(D(f))$ состоит из всех элементов поля $k(X)$, представимых в виде a/f^m, где $a \in k[X]$ и $m \geqslant 0$.

Указание. Воспользуйтесь второй частью теоремы Гильберта о нулях.

Алгебраическими многообразиями называются объекты, получающиеся в результате склейки аффинных многообразий. Точнее говоря:

Определение 3.3. Алгебраическим многообразием называется пара $(X, \mathcal{O}_X)$, где X — топологическое пространство и $\mathcal{O}_X$ — пучок колец на X, являющийся подпучком пучка (всех) функций на X со значениями в k, удовлетворяющая следующему условию: существует конечное открытое покрытие $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$ такое, что для каждого U_i существуют аффинное многообразие X_i и гомеоморфизм $\varphi_i \colon U_i \to X_i$, отождествляющий сечения пучка $\mathcal{O}_X$ над открытыми подмножествами $V \subset U_i$ с сечениями пучка O_{X_i} над подмножествами $\varphi_i(V) \subset X_i$.

Именно так определял алгебраические многообразия Серр в знаменитой статье [10]. Такому понятию, однако, недостает гибкости, и для работы оно не всегда удобно. Более «правильное» понятие — изобретенные Гротендиком *схемы.* Один из возможных способов ознакомиться с теорией схем — по книге Д. Мамфорда [7].

Если X — алгебраическое многообразие, то слой структурного пучка O_X в точке $x \in X$ обозначается $\mathcal{O}_{X,x}$ и называется *локальным кольцом многообразия X в точке x*. Иногда вместо $\mathcal{O}_{X,x}$ пишут просто $\mathcal{O}_x$.

Определим еще *морфизмы* алгебраических многообразий. По определению, морфизм из алгебраического многообразия $(X, \mathcal{O}_X)$ в алгебраическое многообразие $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — это непрерывное отображение $\varphi \colon X \to Y$, удовлетворяющее следующему условию: если $U \subset Y$ — открытое подмножество и $f \in \mathcal{O}_Y(U)$, то $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ (иными словами, морфизм — непрерывное отображение, переводящее регулярные функции в регулярные). Если многообразие Y аффинно, то всякий морфизм из X в Y однозначно определяется индуцированным гомоморфизмом колец $k[Y] \to \mathcal{O}_X(X)$, и обратно, всякий гомоморфизм этих колец, оставляющий основное поле k на месте, индуцирован некоторым морфизмом из X в Y.

Важнейшие примеры алгебраических многообразий, не являющихся аффинными, доставляют *проективные многообразия.* Именно, рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^n$ как фактор $(\mathbb{A}^{n+1} \setminus 0)/k^*$. Точки $\mathbb{P}^n$ будем задавать однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. Замкнутыми подмножествами $\mathbb{P}^n$ назовем подмножества, заданные системами уравнений вида $\{\, F_\alpha(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \,\}$, где $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ и F_α — *однородные* многочлены от $T_0, \dots, T_n$. Топология на $\mathbb{P}^n$, определяемая таким набором замкнутых множеств, также называется топологией

Зарисского. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимое замкнутое подмножество; снабдим его топологией Зарисского (индуцированной с $\mathbb{P}^n$).

Обозначим через $\hat{X}$ замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^{n+1}$, заданное теми же уравнениями, что X. Очевидно, $\hat{X}$ неприводимо. Аффинное многообразие $\hat{X}$ является конусом с вершиной в начале координат и называется аффинным конусом над X; имеем $X = (\hat{X} \setminus \{0\})/k^*$ (по крайней мере как множества). Положим $R_X = k[\hat{X}]$; если обозначить через $R_i \subset R_X$ аддитивную подгруппу, порожденную однородными многочленами степени i, то $R_X = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ и $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$; иными словами, R_X является *градуированным кольцом.* Пусть K — поле частных кольца R_X (то есть поле рациональных функций на $\hat{X}$). Для каждого открытого подмножества $U \subset X$ назовем *регулярной функцией* на U элемент $\varphi \in K$, удовлетворяющий следующему условию:

> Для всякой точки $x \in U$ существует такое $i \geqslant 0$, что $\varphi = F/G$, где $F, G \in R_i$ и $G(x) \neq 0$.

Иными словами, регулярная функция на U локально представляется в виде отношения двух однородных многочленов одинаковой степени (и тем самым действительно является функцией из U в k). Кольцо функций, регулярных на U, обозначается $\mathcal{O}_X(U)$.

Определим теперь пучок колец $\mathcal{O}_X$ на X по правилу $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$; можно показать, что пара $(X, \mathcal{O}_X)$ является алгебраическим многообразием. Делается это следующим образом. Для всякого $i \in [0; n]$ через $\mathbb{A}^n_i \subset \mathbb{P}^n$ обозначим открытое подмножество, состоящее из точек, у которых однородная координата x_i отлична от нуля; отображение $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_i : \ldots y_n)$ задает биекцию между $\mathbb{A}^n_i$ и $\mathbb{A}^n$. Положим $U_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$.

Задача 3.4. Докажите следующие утверждения:

(а) вышеописанная биекция между $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{A}^n_i$ является гомеоморфизмом (в топологии Зарисского);

(б) имеется изоморфизм пучков $\mathcal{O}_X|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$, где в правой части стоит структурный пучок на U_i, рассматриваемом как неприводимое замкнутое подмножество $\mathbb{A}^n_i \cong \mathbb{A}^n$.

Указание. Подробности можно посмотреть у Рида или Шафаревича.

Задача 3.5. Пусть X — аффинное многообразие, $f \in k[X]$. Покажите, что пара $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ является аффинным алгебраическим многообразием.

Указание. Рассмотрите множество $Y = \{\, (x,t) \in X \times \mathbb{A}^1 \mid t \cdot f(x) = 1 \,\}$.

Примеры пучков на алгебраических многообразиях

Пусть $\mathcal{O}$ — пучок колец на пространстве X. В наших приложениях X будет алгебраическим многообразием с топологией Зарисского, а $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ — структурным пучком, но начнем мы с более общей ситуации. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X. Будем говорить, что $\mathcal{F}$ является *пучком модулей над пучком колец* $\mathcal{O}$, или попросту $\mathcal{O}$-модулем, если на каждой из групп сечений $\mathcal{F}(U)$ задана структура $\mathcal{O}(U)$-модуля, причем эти структуры согласованы друг с другом в следующем смысле: если $V \subset U$, и если $f \in \mathcal{O}(U)$, $s \in \mathcal{F}(U)$, то $(fs)|_V = f|_V \cdot s|_V$. Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — два $\mathcal{O}$-модуля, то гомоморфизм пучков абелевых групп $f\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ называется $\mathcal{O}$-гомоморфизмом, если все гомоморфизмы $\mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U)$ являются гомоморфизмами $\mathcal{O}(U)$-модулей. В дальнейшем, говоря о гомоморфизмах, изоморфизмах ... $\mathcal{O}$-модулей, мы будем подразумевать $\mathcal{O}$-гомоморфизмы (если явно не оговорено иное).

Типичный пример $\mathcal{O}$-модуля: X — топологическое пространство (соответственно гладкое многообразие, комплексное многообразие), $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок, то есть пучок непрерывных (соответственно гладких, голоморфных) функций, E — векторное расслоение (соответственно гладкое векторное расслоение, голоморфное векторное расслоение) на X, $\mathcal{O}_X(E)$ — пучок непрерывных (соответственно гладких, голоморфных) сечений расслоения E. Тогда пучок $\mathcal{O}_X(E)$ является $\mathcal{O}_X$-модулем. Еще один (скучный) пример пучка модулей: постоянный пучок $\mathbb{Z}$ на пространстве X можно рассматривать как пучок колец; тогда *любой* пучок абелевых групп является пучком модулей над пучком колец $\mathbb{Z}$.

Пусть $\mathcal{O}$ — пучок колец на пространстве X. Тогда $\mathcal{O}$-модуль (то есть пучок $\mathcal{O}$-модулей) $\mathcal{F}$ называется *свободным ранга* r, если он изоморфен $\mathcal{O}^r$ — прямой сумме r экземпляров пучка $\mathcal{O}$. Более важно для нас понятие *локально свободного* пучка. $\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{F}$ называется *локально свободным,* если у пространства X существует такое открытое покрытие $X = \bigcup U_i$, что $\mathcal{F}|_{U_i}$ свободен над $\mathcal{O}|_{U_i}$ для всех i. Пучок сечений векторного расслоения всегда локально свободен. Этот факт верен для расслоений на дифференцируемых или комплексных многообразиях или на произвольных топологических пространствах, но нам он нужен для расслоений на алгебраических многообразиях:

Задача 3.6. Пусть E — векторное расслоение на алгебраическом многообразии X (определение полностью аналогично, например, определению гладкого векторного расслоения на дифференцируемом многообразии, если всюду заменить слова «дифференцируемое многообразие» на «алгебраическое многообразие» и «гладкое отображение» на «морфизм»), $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок. Докажите, что пучок $\mathcal{O}_X(E)$ локально свободен.

Обратно, всякий локально свободный пучок (конечного ранга) происходит из векторного расслоения:

Задача 3.7. Пусть, в ситуации предыдущей задачи, $\mathcal{F}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль конечного ранга. Докажите, что $\mathcal{F}$ имеет вид $\mathcal{O}_X(E)$ для некоторого векторного расслоения E.

Указание. Пусть ограничения $\mathcal{F}$ на открытые подмножества U_i и U_j свободны. Сравнив базисы для $\mathcal{F}|_{U_i \cap U_j}$, происходящие из базисов $\mathcal{F}|_{U_i}$ и $\mathcal{F}|_{U_j}$, получим матрицы перехода векторного расслоения.

Особенно важен случай векторных расслоений ранга 1 (*линейных расслоений*) и соответствующих им локально свободных пучков ранга 1 (они называются *обратимыми пучками*).

Приведем важный пример обратимого пучка. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, r — целое число. Определим пучок $\mathcal{O}_X(r)$ следующим образом. Пусть $R_X = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ — однородное координатное кольцо многообразия X (см. с. 18), K — поле частных R_X. Сечением $\mathcal{O}_X(r)$ над открытым множеством $U \subset X$ назовем такой элемент $\varphi \in K$, что для всякой точки $x \in U$ существует такое $i \geqslant 0$, что $\varphi = F/G$, где $F \in R_{i+r}$, $G \in R_i$ и $G(x) \neq 0$. Иными словами, сечения $\mathcal{O}_X(r)$ над U суть однородные функции степени r, определенные всюду на U. Если $r = 0$, то $\mathcal{O}_X(r)$ есть не что иное, как структурный пучок $\mathcal{O}_X$; если, однако, $r \neq 0$, то сечения $\mathcal{O}_X(r)$ функциями на X не являются: при попытке приписать сечению «значение» в данной точке обнаруживается, что это значение зависит от выбора однородных координат.

Задача 3.8. Убедитесь, что $\mathcal{O}_X(r)$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, являющийся обратимым пучком.

Решение. Пусть $U_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$. Тогда умножение на x_i^{-r} дает изоморфизм из $\mathcal{O}_X(r)|_{U_i}$ на $\mathcal{O}_{U_i}$. □

Задача 3.9. Пусть $\mathbb{P}^n$ — проективизация $(n+1)$-мерного векторного пространства E (то есть множество прямых в E). В тривиальном векторном расслоении со слоем E над $\mathbb{P}(E)$ рассмотрим подрасслоение L, у которого слой над точкой $p \in \mathbb{P}(E)$, соответствующей прямой $\ell \subset E$, совпадает с этой прямой ℓ. Докажите, что это действительно локально тривиальное линейное расслоение и что соответствующий ему обратимый пучок изоморфен $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$.

Указание. Пусть $\langle e_0, e_1, \ldots, e_n \rangle$ — базис E. Всякое сечение этого расслоения над открытым множеством $U \subset \mathbb{P}^n$ имеет вид $f_0 e_0 + \cdots + f_n e_n$, где f_j — регулярные функции на U, удовлетворяющие условиям $f_i x_j = f_j x_i$ для всех i и j ($x_0, x_1, \ldots, x_n$ — однородные координаты). Тогда $f_0/x_0 = f_1/x_1 = \cdots = f_n/x_n$ — элемент поля K, представляющий сечение $\mathcal{O}_X(-1)$.

Пусть $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на многообразии X, соответствующий линейному расслоению L, и пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие, над которым пучок $\mathcal{L}$ (или, что эквивалентно, расслоение L) тривиализуется. Пусть $\varphi_i\colon \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ — соответствующие изоморфизмы. Ограничим их на $U_i \cap U_j$ и рассмотрим автоморфизм $(\varphi_i)|_{U_i\cap U_j} \circ (\varphi_j)^{-1}|_{U_i\cap U_j}\colon \mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \to \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}$. Всякий автоморфизм пучка $\mathcal{O}_{U_i\cap U_j}$ (как модуля над собой) есть не что иное, как умножение на функцию $g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$, не обращающуюся в нуль нигде на $U_i \cap U_j$. Функции g_{ij} называются *функциями перехода* обратимого пучка (или соответствующего линейного расслоения). Конечно, они зависят от выбора тривиализующего покрытия $\{U_i\}$ и тривиализаций $\{\varphi_i\}$. Пусть $s \in \mathcal{L}(U)$ — сечение; положим $s_i = \varphi_i(s|_{U\cap U_i}) \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)$. Из нашего обсуждения ясно, что:

> Существует взаимно однозначное соответствие между сечениями пучка $\mathcal{L}$ над открытым множеством U и наборами регулярных функций $\{s_i \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)\}$, удовлетворяющими условию
> $$s_i|_{U\cap U_i\cap U_j} = g_{ij} s_j|_{U\cap U_i\cap U_j}.$$

Задача 3.10. Найдите функции перехода пучка $\mathcal{O}_X(r)$, связанные с покрытием $U_i = X \cap \mathbb{A}^n_i$ и тривиализациями, указанными в решении задачи 3.8.

Ответ. $g_{ij} = (x_j/x_i)^r$.

В связи с функциями перехода уместно дать следующие определения.

Определение 3.11. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X, и пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ — открытое покрытие. *Чеховским 1-коциклом* (соответствующим пучку $\mathcal{F}$ и покрытию $\mathfrak{U}$) называется набор сечений $\{g_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)\}$ для всех пар (i, j), где $i \neq j$, удовлетворяющий условиям:

- $g_{ij} + g_{ji} = 0$ для всех i, j; $g_{ii} = 0$.
- $g_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + g_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + g_{ki}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} = 0$ для всех i, j, k.

Чеховский 1-коцикл $\{g_{ij}\}$ называется *кограницей,* если существуют такие сечения $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$, что $g_{ij} = h_i|_{U_i\cap U_j} - h_j|_{U_i\cap U_j}$ для всех i, j.

Факторгруппа группы 1-коциклов по группе 1-кограниц называется *первой группой чеховских когомологий покрытия* $\mathfrak{U}$ *с коэффициентами в пучке* $\mathcal{F}$ и обозначается $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Задача 3.12. Пусть X — алгебраическое многообразие, $\mathfrak{U}$ — его открытое покрытие. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством классов изоморфизма обратимых пучков на X, тривиализующихся над $\mathfrak{U}$, и группой $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*_X)$, где пучок $\mathcal{O}^*_X$ определен по правилу

$$\mathcal{O}_X^*(U) = \{\, f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(x) \neq 0 \text{ для всех } x \in U \,\}$$

(групповая операция — умножение).

Указание. Обратимому пучку ставятся в соответствие функции перехода; как они изменятся при другом выборе тривиализаций?

Задача 3.13. Докажите, что $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = 0$ при $r < 0$ и изоморфно пространству однородных многочленов степени r от $X_0, \ldots, X_n$ при $r \geqslant 0$.

Решение. Пусть s — сечение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ над $\mathbb{A}^n_i \subset \mathbb{P}^n$. Тогда s/X_i^r — регулярная функция на $\mathbb{A}^n_i$, то есть многочлен от $X_0/X_i, \ldots, X_{i-1}/X_i, X_{i+1}/X_i, \ldots, X_n/X_i$. Стало быть, $s|_{\mathbb{A}^n_i}$ представляется в виде F_i/X_i^m, где F_i — однородный многочлен степени $m+r$ (приводя к общему знаменателю, можно считать, что m — одно и то же для всех i). Итак, для всех i, j имеем $F_i/X_i^m = F_j/X_j^m$, или $X_j^m F_i = X_i^m F_j$. Следовательно, каждый из многочленов F_i делится на X_i^m. Если $s \neq 0$, то из этого следует, во-первых, что $\deg F_j \geqslant m \Rightarrow r \geqslant 0$, и во-вторых, что все F_j/X_i^m равны некоторому однородному многочлену G степени r. Все доказано. □

Из результата этой задачи следует, в частности, что $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = k$, то есть все регулярные функции на проективном пространстве являются константами. Точно так же константами являются все регулярные функции на любом проективном многообразии. Интуитивно это более или менее ясно (если основное поле — $\mathbb{C}$, то проективное многообразие является компактным комплексным пространством, а регулярные функции на нем голоморфны, так что утверждение следует из принципа максимума модуля), но доказать это алгебраически не так просто. Самое элементарное доказательство получается с помощью теории исключения (см. [12]). В нашем курсе этот факт окажется побочным продуктом теории когомологий когерентных пучков.

К счастью или к несчастью, при $r > 0$ и для произвольного $X \subset \mathbb{P}^n$ пространство $H^0(X, \mathcal{O}_X(r))$ так просто не вычислишь.

Приведем теперь примеры O_X-модулей, не являющихся локально свободными.

Пусть $Y \subset X$ — замкнутое (в топологии Зарисского, естественно) подмножество алгебраического многообразия X. Определим подпучок $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ так: $\mathcal{I}_Y(U)$ состоит из регулярных функций $f \in \mathcal{O}_X(U)$, тождественно обращающихся в нуль на Y. Очевидно, $\mathcal{I}_Y(U)$ является идеалом в кольце $\mathcal{O}_X(U)$, так что $\mathcal{I}_Y$ действительно является $\mathcal{O}_X$-модулем. Пучок $\mathcal{I}_Y$ называется *пучком идеалов* замкнутого подмножества $Y \subset X$; очень часто этот пучок не будет локально свободным. Впрочем, «очень часто» — не то же самое, что «всегда»:

Задача 3.14. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неприводимая гиперповерхность степени d (это означает, что X — множество нулей неприводимого однородного многочлена степени d). Покажите, что $\mathcal{I}_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)$.

Задача 3.15. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — точка. Покажите, что пучок идеалов $\mathcal{I}_X \subset \mathbb{P}^n$ не является локально свободным при $n > 1$.

Другой пример. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие алгебраического многообразия X, обозначим вложение через $i\colon Y \hookrightarrow X$. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — любой пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Определим пучок $i_*\mathcal{F}$ на X так: $(i_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(Y \cap U)$ (это частный случай конструкции «прямого образа» пучка). Пучок $i_*\mathcal{F}$ обладает естественной структурой $\mathcal{O}_X$-модуля. В самом деле, чтобы ввести такую структуру, нам надо объяснить, как умножить регулярную функцию $f \in \mathcal{O}_X(U)$, где $U \subset X$, на сечение $s \in \mathcal{F}(U \cap Y)$. Это делается очевидным образом: $f \cdot s = (f|_U \cap Y) \cdot s$.

Задача 3.16. Пусть $Y \subset X$ — неприводимое замкнутое подмногообразие, i — вложение. Покажите, что существует естественная точная последовательность
$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0.$$

На практике в описанной ситуации применяют более вольную запись: вместо $i_*\mathcal{F}$ пишут просто $\mathcal{F}$.

Линейные системы

В этом разделе речь пойдет о связи между обратимыми пучками и морфизмами многообразий в проективные пространства.

Определение 3.17. *Линейной системой* на алгебраическом многообразии X называется пара $(\mathcal{L}, V)$, где $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X и $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ — конечномерное векторное подпространство.

Замечание 3.18. Позже мы покажем, что для проективного X и локально свободного пучка $\mathcal{E}$ пространство $H^0(X, \mathcal{E})$ всегда конечномерно, так что для проективных X условие конечномерности в этом определении можно опустить.

Определение 3.19. Пусть $(\mathcal{L}, V)$ — линейная система на алгебраическом многообразии X; обозначим через L линейное расслоение, соответствующее обратимому пучку L. Точка $x \in X$ называется *базисной точкой* нашей линейной системы, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

(a) для всех $s \in V$ имеем $s(x) = 0$ (s рассматривается как сечение расслоения L);

(б) ростки сечений $s \in V$ в точке X *не* порождают $\mathcal{L}_x$ как $\mathcal{O}_{X,x}$-модуль.

Задача 3.20. Убедитесь, что эти условия действительно эквивалентны.

Пусть $(\mathcal{L}, V)$ — линейная система без базисных точек на многообразии X, и пусть L — линейное расслоение, соответствующее $\mathcal{L}$. Положим $\dim V = n+1$. Обозначим через $\mathbb{P}^*(V)$ множество гиперплоскостей (векторных подпространств коразмерности 1) в пространстве V. Линейная система определяет отображение из X в $\mathbb{P}^*(V)$ по формуле $x \mapsto V_x$, где гиперплоскость $V_x \subset V$ состоит из сечений L, принадлежащих пространству V и обращающихся в нуль в точке x.

Задача 3.21. Пусть $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ — базис пространства V. Отождествим слой расслоения L в точке x с k. Покажите, что гиперплоскость $V_x \subset V$ задается уравнением $s_0(x)v_0+\dots+s_n(x)v_n = 0$, где $(y_0, \dots, y_n)$ — координаты в пространстве V относительно базиса $(s_0, s_1, \dots, s_n)$, и тем самым отображение из X в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^*(E)$ задается формулой $x \mapsto (s_0(x) : s_1(x) : \dots : s_n(x))$.

Задача 3.22. Покажите, что отображение, определяемое линейной системой, является морфизмом алгебраических многообразий.

Задача 3.23. Пусть $(\mathcal{L}, V)$ — линейная система без базисных точек на алгебраическом многообразии X. Покажите, что отображение, определяемое этой линейной системой, будет взаимно однозначно на свой образ тогда и только тогда, когда линейная система «разделяет точки»: для любых двух точек $x, y \in X$ существует такое $s \in V$, что $s(x) = 0$, $s(y) \neq 0$.

Описанную конструкцию можно обратить:

Задача 3.24. Пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$ — морфизм алгебраического многообразия в проективное пространство, причем $\varphi(X)$ не лежит ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{P}^n$. Докажите, что морфизм φ определяется некоторой линейной системой на X.

Указание. Пусть Λ — линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$, соответствующее обратимому пучку $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, и пусть $L = \varphi^*(\Lambda)$ — прообраз линейного расслоения Λ на X (напомним общегеометрическое понятие прообраза расслоения: если $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм, $\tilde{\Lambda}$ — тотальное пространство расслоения Λ, и $\pi\colon \tilde{\Lambda} \to Y$ — проекция, то $\tilde{L} = \{\, (x, \lambda) \in X \times \tilde{\Lambda} \mid \varphi(x) = \pi(\lambda) \,\}$ — тотальное пространство расслоения над X, называемого прообразом Λ относительно отображения φ). Если $x_0, \dots, x_n$ — однородные координаты в $\mathbb{P}^n$, рассматриваемые как сечения Λ (см. задачу 3.13), то их же можно рассмотреть как сечения $L = \varphi^*\Lambda$. Линейная система, порождаемая этими сечениями, является искомой.

Задача 3.25. Пусть X — алгебраическое многообразие. Покажите, что конструкция морфизма по линейной системе задает взаимно однозначное соответствие между множеством линейных систем без базисных точек $(\mathcal{L}, V)$ на X, для которых $\dim V = n+1$, и множеством классов эквивалентности морфизмов $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$, для которых линейная оболочка $\varphi(X)$ совпадает со всем $\mathbb{P}^n$. При этом морфизмы φ и φ' считаются эквивалентными, если существует дробно-линейный автоморфизм $u\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, для которого $u \circ \varphi = \varphi'$.

Замечание 3.26. Поскольку морфизм $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^n$, для которого $\varphi(X)$ лежит в гиперплоскости, является композицией линейного вложения проективных пространств и морфизма, удовлетворяющего условиям этой задачи, мы получили полное описание морфизмов в проективные пространства.

Кстати, у проективных пространств и нет никаких автоморфизмов, кроме дробно-линейных.

Задача 3.27. Пусть X — алгебраическое многообразие, $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на X, и пусть $V \subset V' \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ — линейные подпространства размерностей m и m' соответственно. Предположим, что линейная система $(\mathcal{L}, V)$ не имеет базисных точек.

(а) Покажите, что и линейная система $(\mathcal{L}, V')$ не имеет базисных точек.

(б) Пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^{m-1}$ и $\varphi'\colon X \to \mathbb{P}^{m'-1}$ — морфизмы, определяемые этими линейными системами. Покажите, что $\varphi = \pi \circ \varphi'$, где $\pi\colon \mathbb{P}^{m'-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ — проекция с центром в некотором линейном подпространстве Λ размерности $m' - m - 1$, не пересекающемся с $\varphi'(X)$ (проекция π изображена пунктирной стрелкой, так как она определена не на всем $\mathbb{P}^{m'}$, а только на $\mathbb{P}^{m'} \setminus \Lambda$).

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие; предположим также, что X не лежит ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{P}^n$ (это просто нормировка). Какой линейной системой задается вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$? Сейчас увидим.

Задача 3.28. Для всякого целого r постройте гомоморфизм пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r) \to O_X(r)$ (точнее говоря, в правой части стоит $i_*\mathcal{O}_X(r)$, где i — вложение X в $\mathbb{P}^n$; см, с. 23); покажите, что этот гомоморфизм является эпиморфизмом и что его ядро изоморфно $\mathcal{I}_X(r)$, где подпучок $\mathcal{I}_X(r) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ состоит из сечений, обращающихся в нуль на X (дайте точное определение).

Решив эту задачу, мы, в частности, построили точную последовательность

$$0 \to \mathcal{I}_X(r) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r) \to \mathcal{O}_X(r) \to 0. \tag{3.1}$$

Задача 3.29. Покажите, что вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ задается линейной системой $(\mathcal{O}_X(1), V)$, где V — образ гомоморфизма $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_X(1))$, индуцированного построенным в предыдущей задаче гомоморфизмом пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to \mathcal{O}_X(1)$.

Что будет, если, в обозначениях предыдущей задачи, $V \neq H^0(\mathcal{O}_X(1))$, иными словами, если у пучка $\mathcal{O}_X(1)$ есть глобальные сечения, отличные от тех, что приходят из $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ (то есть от линейных комбинаций однородных координат)? Линейная система $(\mathcal{O}_X(1), V')$, где V' строго содержит V, задает вложение $i' \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n'}$, где $n' > n$ (по крайней мере теоретико-множественно, поскольку линейная система V, и тем более V', разделяет точки; можно показать, что это вложение будет и изоморфизмом на свой образ), причем $i'(X)$ не лежит ни в какой гиперплоскости; само же X будет проекцией $i'(X)$ (см. задачу 3.27).

Если $X \subset \mathbb{P}^n$ не является изоморфной проекцией многообразия, невырожденно вложенного в бо́льшее проективное пространство, то говорят, что X *линейно нормально;* как мы видели, это равносильно сюръективности гомоморфизма $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_X(1))$, возникающего из точной последовательности (3.1) при $r = 1$. Если аналогичный гомоморфизм сюръективен при каком-то $r > 1$, то говорят, что многообразие *r-нормально* (это равносильно линейной нормальности r-того образа Веронезе многообразия X); многообразие, r-нормальное при всех $r > 1$, называется *проективно нормальным.*

С m-нормальностью проективных многообразий связан раздел алгебраической геометрии, в котором есть и яркие результаты, и нерешенные проблемы. Вот пример того, что сделано:

> Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неособое проективное многообразие, причем $\dim X > (2n-2)/3$. Тогда X линейно нормально (теорема Зака о секущих).

А вот пример гипотезы, остающейся недоказанной уже более 30 лет:

> Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неособое проективное многообразие, причем $\dim X > 2n/3$. Тогда X проективно нормально (гипотеза Хартсхорна; даже 2-нормальность X в этих предположениях не доказана).

4. Когерентные пучки

Как должна выглядеть теория когомологий

Зафиксируем пространство X. В наиболее элементарной части, относящейся к когомологиям одного-единственного пучка на фиксированном пространстве X, основные положения теории когомологий можно резюмировать следующим образом (всюду слово «пучок» означает «пучок