Задача 3.29. Покажите, что вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ задается линейной системой $(\mathcal{O}_X(1), V)$, где V — образ гомоморфизма $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_X(1))$, индуцированного построенным в предыдущей задаче гомоморфизмом пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to \mathcal{O}_X(1)$.

Что будет, если, в обозначениях предыдущей задачи, $V \neq H^0(\mathcal{O}_X(1))$, иными словами, если у пучка $\mathcal{O}_X(1)$ есть глобальные сечения, отличные от тех, что приходят из $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ (то есть от линейных комбинаций однородных координат)? Линейная система $(\mathcal{O}_X(1), V')$, где V' строго содержит V, задает вложение $i' \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n'}$, где $n' > n$ (по крайней мере теоретико-множественно, поскольку линейная система V, и тем более V', разделяет точки; можно показать, что это вложение будет и изоморфизмом на свой образ), причем $i'(X)$ не лежит ни в какой гиперплоскости; само же X будет проекцией $i'(X)$ (см. задачу 3.27).

Если $X \subset \mathbb{P}^n$ не является изоморфной проекцией многообразия, невырожденно вложенного в бóльшее проективное пространство, то говорят, что X *линейно нормально;* как мы видели, это равносильно сюръективности гомоморфизма $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathcal{O}_X(1))$, возникающего из точной последовательности (3.1) при $r = 1$. Если аналогичный гомоморфизм сюръективен при каком-то $r > 1$, то говорят, что многообразие *r-нормально* (это равносильно линейной нормальности r-того образа Веронезе многообразия X); многообразие, r-нормальное при всех $r > 1$, называется *проективно нормальным.*

С m-нормальностью проективных многообразий связан раздел алгебраической геометрии, в котором есть и яркие результаты, и нерешенные проблемы. Вот пример того, что сделано:

> Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неособое проективное многообразие, причем $\dim X > (2n-2)/3$. Тогда X линейно нормально (теорема Зака о секущих).

А вот пример гипотезы, остающейся недоказанной уже более 30 лет:

> Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — неособое проективное многообразие, причем $\dim X > 2n/3$. Тогда X проективно нормально (гипотеза Хартсхорна; даже 2-нормальность X в этих предположениях не доказана).

4. Когерентные пучки

Как должна выглядеть теория когомологий

Зафиксируем пространство X. В наиболее элементарной части, относящейся к когомологиям одного-единственного пучка на фиксированном пространстве X, основные положения теории когомологий можно резюмировать следующим образом (всюду слово «пучок» означает «пучок абелевых групп» или «пучок векторных пространств»; для определенности примем, что мы работаем с пучками групп):

Каждому пучку $\mathcal{F}$ на X ставится в соответствие набор групп[4] $H^i(X,\mathcal{F})$ *(для всех целых $i \geqslant 0$), а каждому гомоморфизму пучков $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — набор гомоморфизмов $H^i(f)\colon H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(X,\mathcal{G})$, обладающих следующими свойствами:*

1) *Если $f = g \circ h$, то $H^i(f) = H^i(g) \circ H^i(h)$ (иными словами, H^i являются функторами).*

2) *$H^0(X,\mathcal{F})$ естественно изоморфно $\Gamma(X,\mathcal{F})$ (нарисуйте коммутативные диаграммы, выражающие эту естественность).*

3) *Если*
$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$
— точная последовательность пучков, то для всех $i \geqslant 0$ существуют гомоморфизмы $\partial^i\colon H^i(X,\mathcal{F}'') \to H^{i+1}(X,\mathcal{F}')$ такие, что последовательность
$$\dots \to H^i(\mathcal{F}') \to H^i(\mathcal{F}) \to H^i(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(\mathcal{F}') \to H^{i+1}(\mathcal{F}) \to \dots \tag{4.1}$$
является точной.

4) *Если*
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$
— коммутативная диаграмма с точными строками, то диаграммы
$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathcal{F}'') & \xrightarrow{\partial^i} & H^{i+1}(\mathcal{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathcal{G}'') & \xrightarrow{\partial'^i} & H^{i+1}(\mathcal{G}')\dots \end{array}$$
будут коммутативны.

Построение теории когомологий в полной общности — вещь не слишком простая. Поэтому сначала мы дадим определение-времянку, пригодное для построения когомологий так называемых когерентных

[4]Если мы работаем с пучками векторных пространств, то эти группы также являются векторными пространствами, но по традиции и в этом случае говорят о группах когомологий.

пучков на алгебраических многообразиях (все встречавшиеся нам выше пучки модулей над структурным пучком на алгебраических многообразиях являются когерентными) и ни для чего больше, и с этим определением поработаем, общее же определение отложим на потом.

Определение когерентных пучков

Все пучки $\mathcal{O}_X$-модулей на алгебраическом многообразии X, рассматривавшиеся в предыдущем разделе, являются примерами *когерентных пучков.* Неформально говоря, когерентные пучки на алгебраическом многообразии X — это пучки $\mathcal{O}_X$-модулей, встречающиеся в геометрических рассуждениях. В важнейшем для нас случае проективного многообразия X эти слова можно уточнить следующим образом: множество когерентных пучков на X — это наименьшее множество[5] $\mathcal{O}_X$-модулей, обладающее такими свойствами:

- Все локально свободные пучки конечного ранга когерентны.
- Если $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм когерентных $\mathcal{O}_X$-модулей, то $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Coker} f$ также когерентны.

На такое определение приятно смотреть, но чтобы про когерентные пучки можно было что-то доказывать, желательно иметь их более конкретное описание. Именно такое описание и будет положено нами в основу определения; эквивалентность его с приведенным выше описанием категории когерентных пучков на квазипроективном многообразии выяснится лишь a posteriori.

Нам понадобятся определения кольца и модуля частных (подробности см. в [1, с. 49–52] или [6, с. 85–88 и 173]).

Кольца и модули частных

Пусть A — коммутативное кольцо. Подмножество $S \subset A$ называется *мультипликативным,* если для него выполнены два условия:

(а) $1 \in S$;

(б) если $s \in S$ и $t \in S$, то $st \in S$.

Пусть теперь M — модуль над A. Мы определим *модуль частных* $S^{-1}M$ как множество «дробей» вида m/s, где $m \in M$ и $s \in S$, складываемых с помощью приведения к общему знаменателю (обобщение конструкции поля частных целостного кольца). При этом возникает небольшая техническая трудность: если определить равенство дробей по правилу $(m/s = m'/s') \Leftrightarrow (s'm = sm')$, то в случае, когда модуль M

[5] Или категория, если вас шокирует выражение «множество пучков».

имеет кручение, такое «равенство» не будет транзитивным. Поэтому модуль частных определяют так:

> Если $S \subset A$ — мультипликативное подмножество и M — модуль на A, то через $S^{-1}M$ (*модуль частных M относительно S* или *локализация M относительно S*) обозначается множество классов эквивалентности выражений m/s, где $m \in M$ и $s \in S$, относительно следующего отношения эквивалентности:
>
> $$(m/s \sim m'/s') \Leftrightarrow (\exists t \in S\colon t(s'm - sm') = 0).$$
>
> Сложение и умножение на элементы кольца A определяется по следующим формулам:
>
> $$m/s + m'/s' = (s'm + sm')/ss'$$
> $$a \cdot m/s = am/s.$$

Задача 4.1. Проверьте, что это определение корректно.

Задача 4.2. Покажите, что $m/s = 0$ тогда и только тогда, когда существует такое $t \in S$, что $tm = 0$.

Если $M = A$, то $S^{-1}A$ — не просто A-модуль: если определить умножение по формуле $(a/s) \cdot (a'/s') = (aa'/ss')$, то $S^{-1}A$ станет кольцом; если определить действие $S^{-1}A$ на $S^{-1}M$ по формуле $(a/s) \cdot (m/s') = (am/ss')$, то $S^{-1}M$ станет $S^{-1}A$-модулем.

Задача 4.3. Докажите все эти утверждения.

Задача 4.4. Пусть

$$M_1 \to M_2 \to M_3$$

— точная последовательность модулей над кольцом A, и пусть $S \subset A$ — мультипликативное множество. Докажите, что последовательность

$$S^{-1}M_1 \to S^{-1}M_2 \to S^{-1}M_3$$

также точна.

Следующая задача — «со звездочкой».

Задача 4.5. Пусть A — кольцо, M и N — модули над A, и $S \subset A$ — мультипликативное множество. Постройте естественный гомоморфизм

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

и покажите, что он является изоморфизмом в случае, когда кольцо A нетерово, а модуль M конечно порожден; покажите на примере, что в общем случае этот гомоморфизм может не быть изоморфизмом.

Приведем два типичных примера локализации.

Пусть A — кольцо, $f \in A$ и $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Тогда вместо $S^{-1}M$ и $S^{-1}A$ пишут M_f и A_f соответственно.

Второй типичный случай локализации, для которого тоже есть специальное обозначение, таков. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал. Тогда множество $S = A \setminus \mathfrak{p}$ мультипликативно; вместо $S^{-1}M$ и $S^{-1}A$ пишут $M_\mathfrak{p}$ и $A_\mathfrak{p}$ соответственно (это обозначение слабо согласуется с предыдущим, но так уж принято). Говорят, что, например, $A_\mathfrak{p}$ получено из A локализацией в простом идеале $\mathfrak{p}$.

Для нас особенно важен следующий частный случай локализации в простом идеале. Пусть X — аффинное многообразие над полем k; положим $A = k[X]$, и пусть M — модуль над A. Если $x \in X$, то положим $M_x = M_{\mathfrak{m}_x}$, где $\mathfrak{m}_x \subset A$ — максимальный идеал, соответствующий точке $x \in X$ (то есть состоящий из регулярных функций на X, обращающихся в нуль в точке x).

С точки зрения алгебры, интуитивный смысл колец и модулей частных следующий. Кольцо $S^{-1}A$ — это наименьшее кольцо, «содержащее» A и такое, что все элементы S в нем обратимы. Если A — кольцо без делителей нуля, то кавычки можно убрать, поскольку A тогда и вправду вкладывается в $S^{-1}A$, но в общем случае имеем лишь гомоморфизм из A в $S^{-1}A$, который может иметь ядро (задача 4.2). К модулю частных приводит (в рамках алгебры) следующий ход мыслей. Если M — модуль над кольцом A и мы хотим научиться умножать его элементы еще и на все элементы $S^{-1}A$, то для выполнимости аксиом модуля приходится добавить к M некоторые новые элементы (а если у модуля есть кручение, то, возможно, кое-что и отправить в нуль — см. ту же задачу 4.2). Как говорят, $S^{-1}M$ получен из M с помощью «расширения скаляров» от A до $S^{-1}A$ (см. [1, с. 39–40 и 53]).

В геометрии кольцо — это кольцо функций на пространстве, а типичные примеры кольца частных — это кольцо функций, определенных на открытом подмножестве (например, A_f как кольцо функций на $D(f)$ — см. задачу 3.2) или кольцо ростков функций в данной точке (кольцо A_x, где $A = k[X]$ и $x \in X$). Отсюда и термин «локализация». Модуль с точки зрения геометрии — это расслоение или пучок над пространством (вскоре мы увидим, почему), а модуль частных — множество сечений этого расслоения или пучка над открытым множеством или, например, ростков таких сечений в данной точке.

Когерентные и квазикогерентные пучки: определение

Определение когерентных пучков основывается на следующей конструкции. Пусть по-прежнему X — аффинное многообразие и положим $A = k[X]$, и пусть M — модуль над A. Свяжем с модулем M предпучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\tilde{M}$ таким образом. Если $U \subset X$ — открытое множество, то сечением $\tilde{M}$ над U назовем семейство элементов $\{m_x \in M_x\}$ для всех $x \in U$, удовлетворяющее следующему условию согласованности: для всякой $x \in U$ найдутся такое $f \in A$ и $m \in M$, что $x \in D(f) \subseteq U$ и $m_x = m/f$ для всех $x \in D(f)$ (ср. определение пучка, ассоциированного с предпучком; напомним также, что $D(f) \subset X$ есть множество точек, в которых функция f не обращается в нуль). Очевидно, предпучок $\tilde{M}$ является пучком.

Задача 4.6. Убедитесь, что $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

Конструкция пучка $\tilde{M}$ является обобщением конструкции структурного пучка на аффинном многообразии:

Задача 4.7. Кольцо $A = k[X]$ также можно рассматривать как A-модуль. Докажите, что $\tilde{A} = \mathcal{O}_X$.

Теперь можно дать основное определение.

Определение 4.8. Пусть X — алгебраическое многообразие и $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей. Говорят, что пучок $\mathcal{F}$ *когерентен,* если существует аффинное открытое покрытие $X = \bigcup U_i$ такое, что всякий $\mathcal{F}|_{U_i}$ изоморфен $\tilde{M}_i$ как пучок $\mathcal{O}_{U_i}$-модулей, где M_i — конечно порожденный модуль над $k[U_i]$. Если отбросить в этом определении требование конечной порожденности модулей M_i, получим определение *квазикогерентного* пучка.

Из этого определения и задачи 4.7 ясно, что все локально свободные пучки когерентны.

Изучим поподробнее пучки вида $\tilde{M}$. Главное, в чем нам надо разобраться, — как устроены их сечения над открытыми подмножествами вида $D(f)$, где $f \in A$. Если $m \in M$, то дробь вида m/f^r определяет элемент модуля M_x для всех $x \in D(f)$; набор этих элементов определяет, стало быть, сечение пучка $\tilde{M}$ над $D(f)$. Ясно, что при этом получается гомоморфизм $M_f \to \tilde{M}(D(f))$.

Задача 4.9. Покажите, что этот гомоморфизм является мономорфизмом.

Указание. Пусть $I = \{\, a \in A \mid am = 0 \,\}$ (этот идеал называется *аннулятором* элемента m). Если $m/f^r = 0$ во всех M_x при $x \in D(f)$, то из задачи 4.2 следует, что $V(I) \cap D(f) = \varnothing$ (напомним, что $V(I) \subseteq X$ — множество общих нулей функций из I), то есть $V(I) \subseteq V(f)$. Примените теорему Гильберта о нулях.

Задача 4.10. Покажите, что слой пучка $\tilde{M}$ в точке x равен M_x.

Итак, у нас имеется вложение $M_f \hookrightarrow \tilde{M}(D(f))$. Существенно, что это вложение является изоморфизмом. Разобьем доказательство этого факта на ряд этапов.

Задача 4.11. Пусть $f \in A$, $m \in M$, и пусть $m/f^r \in M_f$. Обозначим через $s \in \tilde{M}(D(f))$ сечение пучка $\tilde{M}$ над $D(f)$, соответствующее m/f^r. Пусть $g \in A$; покажите, что ограничение $s|_{D(fg)}$ совпадает с сечением $\tilde{M}$ над $D(fg)$, определенным элементом $g^r m/(fg)^r \in M_{fg}$.

Далее, нам потребуется такой простой, но важный факт:

Задача 4.12. Пусть X — аффинное многообразие, $f \in A = k[X]$. Покажите, что из всякого открытого покрытия топологического пространства $D(f)$ можно выделить конечное подпокрытие (пространства с таким свойством называются *квазикомпактными*).

Указание. Поскольку множества вида $D(g)$ образуют базу топологии Зарисского, можно считать, что покрытие составлено из множеств вида $D(g_\alpha)$. Имеем, по условию, $V(\dots, g_\alpha, \dots) \subset V(f)$. По теореме Гильберта о нулях некоторая степень f лежит в идеале, порожденном g_α. Следовательно, существуют такие $g_1, \dots, g_n$, $h_1, \dots, h_n$ и $s > 0$, что

$$f^s = g_1 h_1 + \dots + g_n h_n. \tag{4.2}$$

Покажите, что $D(f) = D(g_1) \cup \dots \cup D(g_n)$.

Теперь можно приступать к доказательству основного утверждения.

Задача 4.13. Покажите, что $\tilde{M}(D(f)) = M_f$ (в частности, $\Gamma(X, \tilde{M}) = M$).

Решение. Пусть $s = \{s_x\}_{x \in D(f)}$ — сечение M над $(D(f))$. По условию, для каждого $x \in D(f)$ существуют такие $m_x \in M$ и $g_x \in A$, что $g_x(x) \neq 0$ и $s_y = m_x/g_x$ для всех $y \in D(g_x)$. Пользуясь задачей 4.12, выберем конечное число $g_1, \dots, g_n \in A$ и $m_1, \dots, m_n \in M$ таким образом, что для всякого $x \in X$ существует такое $i \in [1; n]$, что $g_i(x) \neq 0$ и $s_x = m_i/g_i$. Очевидно, $s_i = s|_{D(g_i)} \in \tilde{M}(D(g_i))$ — сечение, определенное элементом $m_i/g_i \in M_{g_i}$. По условию, $s_i|_{D(g_i g_j)} = s_j|_{D(g_i g_j)}$, отсюда $g_j m_i/(g_i g_j) = g_i m_j/(g_i g_j)$ в $M_{g_i g_j}$ (задача 4.11). Если бы модуль M не имел кручения, то отсюда мы бы могли заключить, что $g_j m_i = g_i m_j$ и далее завершить доказательство как в задачах 3.1 и 3.2. В общем случае поступим так. Из того, что $g_j m_i/(g_i g_j) - g_i m_j/(g_i g_j) = 0$ в $M_{g_i g_j}$, следует, что существуют такие натуральные числа t_{ij}, что $(g_i g_j)^{t_{ij}}(g_j m_i - g_i m_j) = 0$ (задача 4.2). Положим $t = \max\{m_{ij}\}$ — это t будет годиться для всех пар (i, j). Если теперь положить $m_i' = g_i^t m_i$ и $g_i' = g_i^{t+1}$, то окажется, что $s_i = m_i'/g_i' \in M_{g_i'} = M_{g_i}$, и при этом уже $g_i' m_j' = g_j' m_i'$. Теперь работает серровское разбиение единицы: поскольку $D(f) = \bigcup_{i=1}^n D(g_i')$, теорема Гильберта о нулях гласит, что $f^r = \sum_{i=1}^n h_i g_i'$ для некоторых $r \geqslant 0$ и $h_1, \dots, h_n \in A$. Положим $m = \sum h_i m_i'$; легко видеть, что $f^r m_i' = g_i' m$ для всех i, откуда $m/f^r = m_i'/g_i'$ для всех i, и $m/f^r = s$. □

Задача 4.14. Пусть M — модуль над кольцом $A = k[X]$, где X — аффинное многообразие, и пусть $f \in A$. Покажите, что ограничение пучка $\tilde{M}$ на открытое подмножество $D(f) \subset A$ изоморфно $\widetilde{M_f}$ (здесь M_f рассматривается как A_f-модуль; напомним, что $A_f \cong k[D(f)]$).

Случай аффинных многообразий

Пусть опять X — аффинное многообразие, $A = k[X]$. Всякий пучок вида $\tilde{M}$, где M — модуль над A, является, по определению, квазикогерентным; a priori могло бы оказаться, что существуют (квази)когерентные пучки на X, в таком виде не представляющиеся (точнее, представляющиеся в таком виде только локально). Основное свойство квазикогерентных пучков состоит в том, что этого не происходит:

> Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X. Тогда $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$, где $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Если $\mathcal{F}$ когерентен, то модуль M к тому же конечно порожден над $k[X]$.

Неформально говоря, при работе с (квази)когерентными пучками нет нужды локализовать дальше, чем до аффинного открытого подмножества.

Для доказательства этого утверждения нужна небольшая подготовка.

Задача 4.15. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X; пусть $A = k[X]$ и $f \in A$. Если $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ и $s|_{D(f)} = 0$, то $f^r s = 0$ для некоторого $r > 0$.

Указание. Если $\mathcal{F} = \tilde{M}$, где M — модуль над A, то все немедленно следует из задачи 4.13. В общем случае имеем, по определению $X = \bigcup_{i=1}^{n} D(g_i)$, где $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$. Следовательно, для каждого i существует такое r_i, что $f^{r_i} s|_{D(g_i)} = 0$. Возьмите $r = \max\{r_i\}$.

Задача 4.16. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X; пусть $A = k[X]$ и $f \in A$. Если $s \in \mathcal{F}(D(f))$, то существует такое $t > 0$, что $f^t \cdot s$ продолжается до сечения пучка $\mathcal{F}$ над всем X.

Решение. Если $\mathcal{F} = \tilde{M}$, то все по-прежнему следует из задачи 4.13. В общем случае пусть $X = \bigcup_{i=1}^{n} D(g_i)$, где $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$. Если положить $s|_{D(g_i) \cap D(f)} = s_i$, то для каждого i найдутся такие число r_i и сечение $\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(D(g_i))$, что $(f^{r_i} \cdot \tilde{s}_i)|_{D(fg_i)} = f^{r_i} \cdot s_i$. Поскольку открытое покрытие конечно, можно считать (выбрав наибольшее), что все r_i равны одному числу r. Если бы все $\tilde{s}_i$ склеивались в одно сечение $\tilde{s} \in \Gamma(\mathcal{F})$, то задача была бы решена: выполнялось бы равенство $f^r \cdot \tilde{s}|_{D(f)} = f^r \cdot s$. Гарантировать это, однако, мы не можем: максимум, что можно сказать, это что разность $\tilde{s}_i|_{D(g_i g_j)} - \tilde{s}_j|_{D(g_i g_j)}$ равна нулю при ограничении на

$D(fg_ig_j)$. В силу задачи 4.15 для каждой пары (i,j) можно найти такое число r_{ij}, что

$$f^{r_{ij}} \cdot (\tilde{s}_i|_{D(g_ig_j)} - \tilde{s}_j|_{D(g_ig_j)}) = 0.$$

Положим $t = r + \max\{r_{ij}\}$. Тогда ограничения сечений $f^t \cdot \tilde{s}_i$ и $f^t \cdot \tilde{s}_j$ на $D(g_ig_j)$ совпадают; стало быть, они склеиваются в одно сечение, ограничение которого на $D(f)$ совпадает с $f^t \cdot s$. □

Теперь можно доказывать сформулированное выше основное свойство когерентных пучков на аффинных многообразиях.

Задача 4.17. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X; положим $A = k[X]$, $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$.

Указание. Определим гомоморфизм $\mathcal{O}_X$-модулей $\tilde{M} \to \mathcal{F}$ по такой формуле: если $m \in M$ и $f \in A$, то $m/f \mapsto f^{-1} \cdot (m|_{D(f)})$ (в правой части m рассматривается как глобальное сечение пучка $\mathcal{F}$; доведите эту формулу до аккуратной формулировки). Мономорфность этого гомоморфизма следует из задачи 4.15, а эпиморфность — из задачи 4.16.

Задача 4.18. Пусть в условиях предыдущей задачи пучок $\mathcal{F}$ когерентен. Докажите, что A-модуль $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ конечно порожден.

Указание. Пусть, согласно определению когерентного пучка, $\mathcal{F}|_{D(g_i)} \cong \widetilde{M_i}$, где модуль M_i конечно порожден над A_{g_i}. Выберем у каждого из M_i конечное множество образующих, помножим их на подходящую степень g_i и продолжим на все X (задача 4.16). Покажите, что полученные сечения $\mathcal{F}$ порождают $\Gamma(X, \mathcal{F})$ как A-модуль.

Вот одно следствие из задачи 4.18. Будем говорить, что сечения $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ порождают пучок $\mathcal{F}$ (здесь $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей на алгебраическом многообразии X), если для всякой точки $x \in X$ ростки этих сечений в точке x порождают $\mathcal{F}_x$ как $O_{X,x}$-модуль. Например, если $\mathcal{F}$ — обратимый пучок, то сечения $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ порождают $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда линейная система, порожденная $s_1, \ldots, s_n$ не имеет базисных точек.

Задача 4.19. Пусть X — алгебраическое многообразие. Покажите, что $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{F}$ порожден конечным числом глобальных сечений тогда и только тогда, когда для некоторого $r > 0$ существует эпиморфизм $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{O}_X^r \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.

Указание. Задать гомоморфизм $\varphi\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ — все равно, что задать глобальное сечение $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ (именно, $s = \varphi(1)$); задать гомоморфизм $\mathcal{O}^r \to \mathcal{F}$ — все равно, что задать r штук глобальных сечений.

Задача 4.20. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на аффинном многообразии X. Тогда он порожден конечным числом своих глобальных сечений.

Утверждение этой задачи называется «теоремой A» Серра для аффинных многообразий.

Теорему A можно применить к локально свободному пучку:

Задача 4.21. Пусть E — векторное расслоение над аффинным многообразием X. Покажите, что у этого векторного расслоения существует конечное число сечений $s_1, \ldots, s_n$, обладающих таким свойством: для всякой точки $x \in X$ векторы $(s_1)_x, \ldots, (s_n)_x$ порождают векторное пространство E_x.

Продолжим разговор о когерентных пучках на аффинных многообразиях.

Мы выяснили, что задать (квази)когерентный пучок на аффинном многообразии X — все равно, что задать модуль над $k[X]$. Оказывается, задать гомоморфизм когерентных пучков — то же самое, что задать гомоморфизм модулей:

Задача 4.22. Пусть M и N — модули над кольцом $A = k[X]$, где X — аффинное многообразие. Постройте гомоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$ и покажите, что он является изоморфизмом.

Указание. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфизм модулей. Тогда гомоморфизм пучков задается по правилу $m/f^r \mapsto \varphi(m)/f^r$. Обратное отображение задается так: гомоморфизму пучков $\tilde{M} \to \tilde{N}$ ставится в соответствие гомоморфизм их групп глобальных сечений.

Задачи 4.17 и 4.22 в совокупности показывают, что квазикогерентные пучки над аффинным X — это «то же самое», что модули над $k[X]$. Говоря по-ученому, функтор $M \mapsto \tilde{M}$ задает эквивалентность категорий A-модулей и квазикогерентных пучков на X. Это утверждение иногда называется теоремой Серра об эквивалентности.

Коль скоро категории эквивалентны, ядра и коядра в одной категории соответствуют ядрам и коядрам в другой:

Задача 4.23. Пусть X — аффинное многообразие,

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{j} \mathcal{C}$$

— гомоморфизмы квазикогерентных $\mathcal{O}_X$-модулей, и

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi_*} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{j_*} \Gamma(X, \mathcal{C})$$

— индуцированные гомоморфизмы групп (точнее, $k[X]$-модулей) глобальных сечений. Тогда пара $(\mathcal{C}, j)$ является коядром φ тогда и только тогда, когда пара $(\Gamma(X, \mathcal{C}), j_*)$ является коядром φ_*.

Указание. Докажем, например, что «только тогда». Итак, $(\mathcal{C}, j) = \operatorname{Coker}\varphi$. Чтобы доказать, что j_* — коядро φ_*, предположим, что $h\colon \Gamma(X, \mathcal{G}) \to M$ — такой гомоморфизм $k[X]$-модулей, что $h \circ \varphi_* = 0$. Пусть $\tilde{h}\colon \mathcal{G} \to \tilde{M}$ — индуцированный гомоморфизм пучков. Тогда, поскольку j — коядро φ, существует такой гомоморфизм $\psi\colon \mathcal{C} \to \tilde{M}$, что $\tilde{h} = \psi \circ \tilde{h}$. Покажите, что индуцированный гомоморфизм $\psi_*\colon \Gamma(X, \mathcal{C}) \to N$ — тот самый, существование которого требуется определением коядра.

Задача 4.24. Сформулируйте и докажите утверждение, получающееся из задачи 4.23 заменой коядер на ядра.

Из доказанных утверждений вытекает такое важное следствие:

Задача 4.25. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \xrightarrow{u} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{v} \mathcal{F}_3 \to 0 \tag{4.3}$$

— точная последовательность квазикогерентных пучков на аффинном многообразии. Тогда индуцированная последовательность

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{u_*} \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{v_*} \Gamma(X, \mathcal{F}_3) \to 0$$

тоже точна.

Указание. Точность последовательности (4.3) равносильна тому, что пара $(\mathcal{F}_1, u)$ является ядром гомоморфизма v и пара $(\mathcal{F}_3, v)$ является коядром гомоморфизма u.

Тот факт, что точной последовательности квазикогерентных пучков на аффинном многообразии соответствует точная последовательность групп сечений, свидетельствует о том, что старшие группы когомологий этих пучков на этих многообразиях «должны» обращаться в нуль. Так оно, как мы увидим, и будет.

В заключение заметим, что радикальное упрощение теории когерентных пучков, видимо, невозможно по той причине, что не всякий пучок $\mathcal{O}_X$-модулей квазикогерентен:

Задача 4.26. Пусти X — алгебраическое многообразие, $x \in X$. Определим подпучок $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X$ так:

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(U) & \text{если } x \notin U; \\ 0 & \text{если } x \in U. \end{cases}$$

Покажите, что $\mathcal{F}$ — пучок идеалов в $\mathcal{O}_X$ (и тем самым $\mathcal{O}_X$-модуль), не являющийся квазикогерентным.

Общий случай

В предыдущем разделе мы описали структуру (квази)когерентных пучков на аффинных многообразиях. Из этого описания следует такой полезный технический результат:

Задача 4.27. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на алгебраическом многообразии X. Тогда для всякого аффинного открытого подмножества $U \subset X$ существует такой модуль M над $k[U]$, что ограничение $\mathcal{F}|_U$ изоморфно $\tilde{M}$; если $\mathcal{F}$ когерентен, то модуль M конечно порожден над $k[U]$.

Задача 4.28. Пусть Y — замкнутое подмногообразие X и $\mathcal{F}$ — (квази)когерентный пучок на Y. Покажите, что $\mathcal{F}$, рассматриваемый как $\mathcal{O}_X$-модуль (иными словами, пучок $i_*\mathcal{F}$, где $i\colon Y \hookrightarrow X$ — вложение), также является (квази)когерентным.

Нам осталось доказать, что для пучков на проективных многообразиях наше определение когерентного пучка равносильно определению со с. 28. Вот первый шаг к доказательству этого факта (утверждение важно и само по себе):

Задача 4.29. Докажите, что ядро и коядро гомоморфизма (квази)когерентных пучков также (квази)когерентно.

Второй шаг в доказательстве эквивалентности двух определений — важная «теорема А Серра для проективных многообразий». Чтобы ее сформулировать и доказать, нам потребуется ввести понятие «подкрутки», для чего, в свою очередь, придется напомнить основные факты про тензорное произведение модулей.

Тензорное произведение и подкрутка

Начнем с напоминания основных фактов про тензорное произведение модулей (подробности — во второй главе книжки [1]).

Итак, пусть M, N и P — модули над коммутативным кольцом A. Отображение $\Phi\colon M \times N \to P$ называется билинейным, если выполнены такие условия:

$$\begin{aligned} \Phi(m_1 + m_2, n) &= \Phi(m_1, n) + \Phi(m_2, n); \\ \Phi(m, n_1 + n_2) &= \Phi(m, n_1) + \Phi(m, n_2) \\ \Phi(am, n) &= \Phi(m, an) = a\Phi(m, n). \end{aligned}$$

(здесь $a \in A$).

Тензорным произведением модулей M и N называется модуль $M \otimes_A N$ (или попросту $M \otimes N$) вместе с билинейным отображением $\Phi_0\colon M \times N \to M \otimes_A N$, удовлетворяющие следующему условию:

для всякого билинейного отображения $\Phi\colon M \times N \to P$ существует единственный гомоморфизм $\varphi\colon M \otimes_A N \to P$, такой, что $\Phi = \varphi \circ \Phi_0$.

Иными словами, тензорное произведение M и N — это «наименьший» модуль, в который может бить билинейное отображение из $M \times N$.

Обозначим $\Phi_0(m,n) = m \otimes n \in M \otimes N$. Тогда A-модуль $M \otimes N$ порождается образующими $m \otimes n$ для всевозможных $m \in M, n \in N$ и следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n; \\ m \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2; \\ (am) \otimes n = m \otimes (an) &= a(m \otimes n). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Приведем три поучительных примера.

(а) Пусть $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, причем числа m и n взаимно просты. Тогда $M \otimes N = 0$. В самом деле, пусть $pm + qn = 1$, где p и q — целые числа. Тогда для любых $u \in M$, $v \in N$ имеем:

$$u \otimes v = (pm+qn)(u \otimes v) = pm(u \otimes v) + qn(u \otimes v) = (pmu) \otimes v + u \otimes (qnv) = 0$$

(из соотношений (4.4) легко видеть, что $u \otimes 0 = 0 \otimes v = 0$ всегда).

(б) Пусть M и N — свободные модули с базисами $\langle e_1, \ldots, e_m \rangle$ и $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ соответственно. Тогда $M \otimes N$ — свободный модуль ранга mn с базисом, состоящим из всевозможных $e_i \otimes f_j$.

(в) Пусть M — произвольный A-модуль, $I \subset A$ — идеал, и пусть $N = A/I$. Тогда $M \otimes N \cong M/IM$.

Задача 4.30. Докажите утверждения примеров (б) и (в), исходя непосредственно из определения тензорного произведения.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — квазикогерентные пучки на алгебраическом многообразии X. Тогда их тензорным произведением называется пучок, ассоциированный с предпучком

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

Можно показать, что $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ — также (квази)когерентный пучок; точнее говоря, если X — аффинное многообразие, $A = k[X]$, $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\mathcal{G} = \tilde{N}$, то $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \widetilde{M \otimes_A N}$. Читатель, желающий вникнуть в детали, может доказать это самостоятельно, пользуясь изложенными в главе 3 книги [1] фактами о взаимосвязи тензорного произведения и локализации.

Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X, $m \in \mathbb{Z}$. Пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_x(r)$ называют *подкруткой* пучка $\mathcal{F}$ на r и обозначают $\mathcal{F}(r)$. Подкрутка (как и вообще тензорное умножение на обратимый пучок) ничего не меняет в локальном строении пучка: ведь с локальной точки зрения это просто тензорное умножение модуля над кольцом $A = k[U]$, где U — аффинное открытое множество, на то же самое кольцо A, от чего модуль не изменится. Меняет подкрутка способ склейки пучка из локальных кусков. Чтобы освоиться с подкруткой, вот задача:

Задача 4.31. Докажите, что $\mathcal{O}_X(r) \otimes \mathcal{O}_X(s) \cong \mathcal{O}_X(r+s)$.

Указание. Определим гомоморфизм $\mathcal{O}_X(r)\otimes\mathcal{O}_X(s) \to \mathcal{O}_X(r+s)$ по формуле $f \otimes g \mapsto f \cdot g$ (здесь f и g — сечения $\mathcal{O}_X(r)$ и $\mathcal{O}_X(s)$ соответственно над открытым множеством $U \subset X$). Это определение корректно: произведение однородных функций степеней r и s действительно даст однородную функцию степени $r+s$, и очевидно, что это отображение согласуется с соотношениями (4.4). Осталось проверить, что этот гомоморфизм является изоморфизмом; это достаточно проверить на всех пересечениях $X \cap \mathbb{A}^n_i$, где пучки $\mathcal{O}_X(l)$ соответствуют свободным модулям ранга 1; см. пример (б) выше.

Задача 4.32. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность квазикогерентных пучков на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$. Покажите, что для всякого $r \in \mathbb{Z}$ индуцированная последовательность

$$0 \to \mathcal{F}_1(r) \to \mathcal{F}_2(r) \to \mathcal{F}_3(r) \to 0$$

также точна.

Замечание 4.33. Вообще, тензорное умножение на локально свободный пучок сохраняет точность последовательностей. Про умножение на произвольный когерентный пучок этого сказать уже нельзя (невозможно гарантировать точность слева). С примерами такого рода мы через некоторое время столкнемся. По поводу общей теории см. [1, с. 40–42].

Теперь мы можем заняться обещанным проективным вариантом теоремы A. Аффинный вариант этой теоремы гласил, что каждый когерентный пучок над аффинным многообразием порождается конечным числом своих глобальных сечений (задача 4.20). Для пучков над проективными многообразиями буквально такой результат неверен, поскольку когерентный пучок может вообще не иметь ненулевых сечений (пример тому — пучки $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ при $r < 0$). Тем не менее, оказывается, что для данного когерентного пучка $\mathcal{F}$ на проективном многообразии и для всех $r \gg 0$ пучки $\mathcal{F}(r)$ уже порождены глобальными сечениями — в этом и состоит проективная теорема A.

Чтобы доказать теорему A, заметим, прежде всего, следующее. Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, то всякий однородный многочлен степени r от однородных координат $T_0, \ldots, T_n$ определяет глобальное сечение пучка $O_X(r)$ (если $X \neq \mathbb{P}^n$, то различные однородные многочлены могут определять одно и то же сечение). Если теперь F — такой многочлен и $s \in \mathcal{F}(U)$, где $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X и $U \subset X$ — открытое множество, то $s \otimes F \in \mathcal{F}(r)(U)$.

Руководствуясь этим соображением, будем имитировать доказательство аффинной теоремы A так:

Задача 4.34. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$; пусть $U \subset X$ — открытое подмножество, $s \in \mathcal{F}(U)$, и пусть $s|_{U \cap \mathbb{A}^n_i} = 0$ для некоторого i (напомним, что открытое подмножество $\mathbb{A}^n_i \subset \mathbb{P}^n$ определяется условием $T_i \neq 0$). Тогда для некоторого $r > 0$ имеем $s \otimes T_i^r = 0$ как сечение пучка $\mathcal{F}(r)$ над U.

Решение. Пусть, для начала, $U \subset \mathbb{A}^n_j$ для некоторого $j \neq i$. Тогда $U \cap \mathbb{A}^n_i = D(T_i/T_j)$, и из задачи 4.15 следует, что $(T_i/T_j)^r s = 0$ для некоторого r; последнее равенство равносильно тому, что $s \otimes T_i^r = 0$. В общем случае представим U в виде объединения множеств, содержащихся в каких-то $\mathbb{A}^n_j$, и возьмем максимум получающихся чисел r. □

Задача 4.35. Пусть в тех же условиях $s \in \mathcal{F}(X \cap \mathbb{A}^n_i)$. Тогда для всех $r \gg 0$ сечение $s \otimes T_i^r \in \mathcal{F}(r)(X \cap \mathbb{A}^n_i)$ продолжается до сечения пучка $\mathcal{F}(r)$ над всем X.

Решение. На сей раз мы следуем решению задачи 4.16. Именно, эта задача показывает, что для каждого $j \neq i$ и для всех $r \gg 0$ сечение $(T_i/T_j)^r \cdot (s|_{\mathbb{A}^n_i \cap \mathbb{A}^n_j})$ продолжается на $\mathbb{A}^n_j$. Выберем одно такое r, годное для всех j. Получится, что для каждого $j \neq i$ сечение $(s|_{\mathbb{A}^n_i \cap \mathbb{A}^n_j}) \otimes T_i^r \in \mathcal{F}(r)(\mathbb{A}^n_i \cap \mathbb{A}^n_j)$ продолжается до сечения $\mathcal{F}(r)$ над $\mathbb{A}^n_j$. Если бы эти сечения были согласованы на пересечениях $\mathbb{A}^n_{j'} \cap \mathbb{A}^n_{j''}$, то все было бы готово; если этой согласованности нет, то добьемся ее за счет увеличения r как в решении задачи 4.16 (ссылаясь на 4.34 вместо 4.15). □

Теперь уже легко сформулировать и доказать теорему A для проективных многообразий:

Задача 4.36. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$; тогда для всех $r \gg 0$ пучок $\mathcal{F}(r)$ порождается конечным числом своих глобальных сечений.

Часто используется такое следствие теоремы A:

Задача 4.37. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$; тогда существует эпиморфизм $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$, где $\mathcal{E}$ — конечная прямая сумма пучков вида $\mathcal{O}_X(m)$.

Указание. Из теоремы A следует, что существует эпиморфизм $\mathcal{O}_X^m \to \mathcal{F}(r)$; подкрутите на $-r$.

Наконец, мы можем завершить доказательство эквивалентности (для случая проективных многообразий) определения когерентного пучка, с которым мы работали, и «простого» определения со с. 28.

Задача 4.38. Покажите, что всякий когерентный пучок на проективном многообразии изоморфен коядру гомоморфизма локально свободных пучков.

Указание. Примените задачу 4.37 дважды.

5. Когомологии Чеха

Определение

Пусть
$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G} \to 0$$
— точная последовательность пучков абелевых групп или векторных пространств на топологическом пространстве X. Теория когомологий занимается изучением препятствий к эпиморфности индуцированного гомоморфизма $v_*\colon \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$. Пусть $s \in \Gamma(X, \mathcal{G})$; что мешает ему подняться до глобального сечения пучка $\mathcal{F}$? Поскольку гомоморфизм пучков $u\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ является эпиморфизмом, сечение s, во всяком случае, поднимается локально: существует покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ пространства X открытыми множествами такое, что, для каждого $i \in I$, $s|_{U_i} = v_*(t_i)$, где $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Для всякой пары $i, j \in I$ положим $t_{ij} = t_i|_{U_I\cap U_j} - t_j|_{U_I\cap U_j}$. Если все t_{ij} равны нулю, то сечения t_i склеиваются в одно, и искомый подъем найден. В общем случае можно только сказать, что $v(t_{ij}) = 0$, то есть что $t_{ij} = v_*(s_{ij})$, где $s_{ij} \in \mathcal{E}(U_i \cap U_j)$. Очевидно, $s_{ij}+s_{ji} = 0$ и $s_{ij}+s_{jk}+s_{ki} = 0$ для всяких i, j и k. Таким образом, набор $\{s_{ij}\}$ является чеховским 1-коциклом покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{E}$ (определение 3.11). Далее, если сами t_i не склеиваются в глобальное сечение пучка $\mathcal{F}$, можно попытаться исправить дело за счет другого выбора t_i. Произвол этого выбора следующий: вместо t_i можно взять $t_i + u_*(s_i)$, где $s_i \in \mathcal{E}(U_i)$. Сечения $t_i + u_*(s_i)$ склеиваются в одно тогда и только тогда, когда их ограничения на попарные пересечения множеств U_i совпадают, то есть когда $s_{ij} = s_j - s_i$ — иными словами, когда коцикл $\{s_{ij}\}$ является кограницей (см. то же определение). Итак,