Задача 4.37. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$; тогда существует эпиморфизм $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$, где $\mathcal{E}$ — конечная прямая сумма пучков вида $\mathcal{O}_X(m)$.

Указание. Из теоремы A следует, что существует эпиморфизм $\mathcal{O}_X^m \to \mathcal{F}(r)$; подкрутите на $-r$.

Наконец, мы можем завершить доказательство эквивалентности (для случая проективных многообразий) определения когерентного пучка, с которым мы работали, и «простого» определения со с. 28.

Задача 4.38. Покажите, что всякий когерентный пучок на проективном многообразии изоморфен коядру гомоморфизма локально свободных пучков.

Указание. Примените задачу 4.37 дважды.

5. Когомологии Чеха

Определение

Пусть

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G} \to 0$$

— точная последовательность пучков абелевых групп или векторных пространств на топологическом пространстве X. Теория когомологий занимается изучением препятствий к эпиморфности индуцированного гомоморфизма $v_*\colon \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G})$. Пусть $s \in \Gamma(X,\mathcal{G})$; что мешает ему подняться до глобального сечения пучка $\mathcal{F}$? Поскольку гомоморфизм пучков $u\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ является эпиморфизмом, сечение s, во всяком случае, поднимается локально: существует покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ пространства X открытыми множествами такое, что, для каждого $i \in I$, $s|_{U_i} = v_*(t_i)$, где $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$. Для всякой пары $i, j \in I$ положим $t_{ij} = t_i|_{U_I\cap U_j} - t_j|_{U_I\cap U_j}$. Если все t_{ij} равны нулю, то сечения t_i склеиваются в одно, и искомый подъем найден. В общем случае можно только сказать, что $v(t_{ij}) = 0$, то есть что $t_{ij} = v_*(s_{ij})$, где $s_{ij} \in \mathcal{E}(U_i \cap U_j)$. Очевидно, $s_{ij} + s_{ji} = 0$ и $s_{ij} + s_{jk} + s_{ki} = 0$ для всяких i, j и k. Таким образом, набор $\{s_{ij}\}$ является чеховским 1-коциклом покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{E}$ (определение 3.11). Далее, если сами t_i не склеиваются в глобальное сечение пучка $\mathcal{F}$, можно попытаться исправить дело за счет другого выбора t_i. Произвол этого выбора следующий: вместо t_i можно взять $t_i + u_*(s_i)$, где $s_i \in \mathcal{E}(U_i)$. Сечения $t_i + u_*(s_i)$ склеиваются в одно тогда и только тогда, когда их ограничения на попарные пересечения множеств U_i совпадают, то есть когда $s_{ij} = s_j - s_i$ — иными словами, когда коцикл $\{s_{ij}\}$ является кограницей (см. то же определение). Итак, всякое сечение $\mathcal{G}$, локально поднимающееся в $\mathcal{F}$ над покрытием $\mathfrak{U}$, определяет элемент группы $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$, причем сечение поднимается в $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда этот элемент равен нулю.

Теперь определим группы $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ для любого пучка $\mathcal{F}$ и для любого $i \geqslant 0$. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на пространстве X и $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие (среди множеств U_i могут быть пустые или повторяющиеся). Если $i_0, \dots, i_r \in I$, то положим, по определению, $U_{i_0, \dots, i_r} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r}$.

Чеховской r-коцепью покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$ называется набор сечений $s_{i_0, \dots, i_r} \in \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_r})$ (для всех последовательностей из $r+1$ элемента I), кососимметричный по $i_0, \dots, i_r$ (это означает, что при перестановке двух индексов знак меняется на противоположный, а также что $s_{i_0, \dots, i_r} = 0$, если среди индексов есть совпадающие). Группа всех чеховских r-коцепей обозначается $C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Гомоморфизм $d^r : C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ действует по следующей формуле:

$$(d^r s)_{i_0, \dots, i_{r+1}} = \sum_{t=0}^{r+1} (-1)^t s_{i_0, \dots, i_{t-1}, i_{t+1}, \dots, i_{r+1}} |_{U_{i_0, \dots, i_{r+1}}}.$$

Задача 5.1. Покажите, что $d^r(C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$ действительно лежит в $C^{r+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ и что $d^{r+1} d^r = 0$.

Тем самым набор $(C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), d^r)$ образует комплекс $C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Этот комплекс называется *комплексом Чеха* покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$. Положим $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^r(C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$. Эта группа называется, по определению, r-й *группой когомологий Чеха покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$.*

Задача 5.2. Покажите, что $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Задача 5.3. Убедитесь, что старое и новое определения $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ эквивалентны.

Когомологии Чеха покрытия — первое приближение к когомологиям пучка. Правда, это лишь приближение: при разном выборе покрытий могут получаться разные ответы, и даже если ограничиться одним фиксированным покрытием, то может нарушаться такое (основное) свойство когомологий, как наличие точной когомологической последовательности (4.1) (точной последовательности пучков может не соответствовать точная последовательность комплексов Чеха). Чтобы получить что-то разумное, надо переходить к пределу по семейству всех покрытий, и даже этот подход дает результаты не для всех пространств, а теория получается довольно неуклюжей. Если, однако, X — квазипроективное[6] алгебраическое многообразие, а пучок $\mathcal{F}$ (квази)когерентен, то

[6] То есть изоморфное открытому подмножеству проективного многообразия; в частности, все проективные и все аффинные многообразия квазипроективны.

чеховский подход увенчивается полным успехом: оказывается, что для всех конечных *аффинных* (то есть состоящих из аффинных открытых подмножеств) покрытий $\mathfrak{U}$ группы $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ изоморфны; если обозначить эту не зависящую от выбора аффинного покрытия группу через $H^r(X, \mathcal{F})$, то оказывается, что все свойства когомологий (для квазикогерентных пучков) выполнены. Оставляя общее определение когомологий и эквивалентность его чеховскому для когерентных пучков на потом, займемся чеховскими когомологиями. В первых задачах нам еще нет нужды предполагать, что X — алгебраическое многообразие.

Для любого покрытия $\mathfrak{U}$ и пучка $\mathcal{F}$ положим $C^{-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ и определим гомоморфизм $d^{-1}\colon C^{-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ по формуле $(d^{-1}s)_i = s|_{U_i}$. Комплекс

$$0 \to C^{-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^{-1}} C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \dots$$

будем называть *пополненным комплексом Чеха* и обозначать $\tilde{C}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Задача 5.4. Покажите, что $H^r(\tilde{C}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = \check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ при $r > 0$ и $H^r(\tilde{C}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) = 0$ при $r \leqslant 0$.

Задача 5.5. Пусть само пространство X входит в покрытие $\mathfrak{U}$ в качестве одного из его элементов. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $r > 0$.

Указание. Достаточно показать, что пополненный комплекс Чеха стягиваем. Если $X = U_\alpha$, где $\alpha \in I$, то стягивающую гомотопию σ строим так: для $s \in \tilde{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ положим $(\sigma s)_{i_0,\dots,i_{r-1}} = s_{\alpha,i_0,\dots,i_{r-1}}$.

Одно свойство квазипроективных многообразий

В дальнейшем нам потребуется следующий технический результат из алгебраической геометрии:

> Пусть X — алгебраическое многообразие, изоморфное открытому подмножеству проективного многообразия (такие многообразия называются квазипроективными), и пусть $U, V \subset X$ — аффинные открытые подмножества (то есть открытые подмножества, изоморфные аффинным многообразиям). Тогда подмножество $U \cap V \subset X$ тоже аффинно.

Для знающих определение произведения алгебраических многообразий объясним, как доказывается этот факт. Пусть $\Delta \subset X \times X$ — диагональ. Как известно, $\Delta \subset X \times X$ замкнута, если X квазипроективно. Многообразие $U \times V$ аффинно как произведение двух аффинных; значит и его замкнутое подмножество $U \cap V \cong (U \times V) \cap \Delta$ также аффинно.

Для тех, кому это доказательство ничего не сказало, приведем два примера.

(а) Пусть X — аффинное многообразие, $f, g \in k[X]$. Открытые подмножества $D(f)$ и $D(g)$, как известно, аффинны (задача 3.5). Их пересечение равно $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ и, стало быть, тоже аффинно.

(б) Склеим два экземпляра аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, отождествив в них подмножество $\mathbb{A}^n \setminus 0$ (через 0 мы обозначили начало координат). На получившемся множестве X введем топологию (множество открыто, если открыты его пересечения с обоими экземплярами $\mathbb{A}^n$) и пучок функций (функция на $U \subset X$ регулярна, если регулярны ее ограничения на пересечения U с обоими экземплярами $\mathbb{A}^n$). Получается алгебраическое многообразие, причем оба экземпляра $\mathbb{A}^n$ будут его аффинными открытыми подмножествами. Их пересечение есть $\mathbb{A}^n \setminus 0$, и при $n > 1$ это многообразие не аффинно (объяснение для знающих ТФКП: над $\mathbb{C}$ аффинное многообразие должно быть многообразием Штейна, каковым $\mathbb{C}^n \setminus 0$ при $n > 1$ не является; можно также вывести неаффинность этого многообразия прямо из определений, либо, как мы вскоре увидим, из когомологических соображений).

Задача 5.6. Пусть $\mathfrak{U}$ — аффинное открытое покрытие квазипроективного многообразия X, и пусть

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

— точная последовательность (квази)когерентных пучков. Покажите, что существует точная последовательность

$$\cdots \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}'') \to \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}') \to \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \dots.$$

Указание. Покажите, что последовательность комплексов Чеха точна.

Комплекс Кошуля

Чтобы считать когомологии Чеха когерентных пучков (а также доказывать корректность их определения), нам придется познакомиться с важным понятием гомологической алгебры — *комплексом Кошуля.* Начнем с мотивировок.

Пусть A — коммутативное кольцо, и пусть $I \subset A$ — идеал, порожденный элементами $f_1, \dots, f_n$. Эту мысль можно выразить также следующим образом: существует точная последовательность

$$0 \leftarrow A/I \leftarrow A \leftarrow A^n, \tag{5.1}$$

в которой гомоморфизм из свободного модуля $A^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ в A задается по правилу $e_i \mapsto f_i$. Далее, между образующими $f_1, f_2, \dots, f_n$

могут быть какие-то соотношения; предположим, что можно выделить конечное число соотношений таким образом, что все прочие соотношения из них следуют (если кольцо A нетерово, так оно и будет). Пусть таких «образующих» соотношений m штук; эту мысль можно выразить, сказав, что точная последовательность (5.1) может быть продолжена до точной последовательности

$$0 \leftarrow A/I \leftarrow A \leftarrow A^n \leftarrow A^m,$$

где образующие свободного модуля A^m находятся во взаимно однозначном соответствии с соотношениями между $f_1, \ldots, f_m$, а гомоморфизм из A^m в A^n устроен так: если образующей A^m соответствует соотношение вида $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$, то эта образующая переходит в $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in A^n$.

Между соотношениями также могут быть соотношения, и т. д; продолжая в том же духе, получаем точную последовательность

$$0 \leftarrow A/I \leftarrow A \leftarrow A^n \leftarrow A^m \leftarrow A^p \leftarrow \ldots;$$

эта последовательность (а точнее говоря, комплекс, который получится, если отбросить в ней A/I) называется *свободной резольвентой* A-модуля A/I.

Как устроены свободные резольвенты, коротко не скажешь[7], но можно по крайней мере выделить некоторое множество присутствующих всегда соотношений между образующими $f_1, \ldots, f_n$, соотношений между этими соотношениями, и т. д. При этом, поскольку нет гарантии, что этими соотношениями все исчерпывается, мы не обязательно получим резольвенту: можно быть уверенным лишь в том, что получится комплекс свободных A-модулей. Этот комплекс и будет называться комплексом Кошуля.

Теперь конкретно. Пусть A — коммутативное кольцо, $f_1, \ldots, f_n \in A$ — последовательность из n элементов кольца A. Для каждого целого $i \in [0; n]$ пусть $K_i^A(f_1, \ldots, f_n)$ — свободный A-модуль ранга $\binom{n}{i}$ с базисом, состоящим из элементов $e_{p_1,\ldots,p_i}$, где $1 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_i \leqslant n$ (если $n = 0$, то $K_0^A(f_1, \ldots, f_n)$ имеет базис из одного элемента e). Определим гомоморфизмы $d_i \colon K_i^A(f_1, \ldots, f_n) \to K_{i-1}^A(f_1, \ldots, f_n)$ на элементах базиса по формуле:

$$d_i \colon e_{p_1,\ldots,p_i} \mapsto \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} f_j e_{p_1,\ldots,p_{j-1},p_{j+1},\ldots,p_i}.$$

[7]Например, классическая «теорема Гильберта о сизигиях» гласит, что в случае, когда $A = k[X_1, \ldots, X_N]$ (кольцо многочленов), всегда существует свободная резольвента длины $\leq N$.

Задача 5.7. Докажите, что последовательность модулей и гомоморфизмов

$$0 \to K_n^A(f_1, \ldots, f_n) \xrightarrow{d_n} K_{n-1}^A(f_1, \ldots, f_n) \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_1} K_0^A(f_1, \ldots, f_n) \to 0$$

является комплексом (вспомните, что мы говорили про запись комплексов с нижними индексами).

Комплекс $K_\cdot^A(f_1, \ldots, f_n)$ называется *комплексом Кошуля.*

Задача 5.8. Докажите, что $H_0(K_\cdot^A(f_1, \ldots, f_n)) = A/(f_1, \ldots, f_n)$.

Задача 5.9. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) комплекс $K_\cdot^A(f_1, \ldots, f_n)$ стягиваем;

(2) комплекс $K_\cdot^A(f_1, \ldots, f_n)$ ацикличен;

(3) $(f_1, \ldots, f_n) = A$.

Указание. Надо только доказать, что (3) $\Rightarrow$ (1); если $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$, то определим стягивающую гомотопию $s\colon K_i^A(f_1, \ldots, f_n) \to K_{i+1}^A(f_1, \ldots, f_n)$ по формуле

$$e_{p_1,\ldots,p_i} \mapsto \sum_{j \in [1;n] \setminus \{p_1,\ldots,p_i\}} g_j e_{(j,p_1,\ldots,p_i)},$$

где для всякой последовательности $S = (q_1, \ldots, q_r)$ мы полагаем $e_S = \varepsilon e_{q'_1,\ldots,q'_r}$ (ε — знак перестановки, расставляющей элементы последовательности S в порядке возрастания, $(q'_1, \ldots, q'_r)$ — результат такой перестановки).

В работе с комплексами Кошуля помогает такой факт:

Задача 5.10. Докажите, что комплекс Кошуля $K_\cdot^A(f_1, \ldots, f_n)$ изоморфен конусу $C(\varphi)$, где гомоморфизм $\varphi\colon K_\cdot^A(f_2, \ldots, f_n) \to K_\cdot^A(f_2, \ldots, f_n)$ задается умножением на f_1.

Будем для краткости писать $H_i^A(f_1, \ldots, f_n)$ вместо $H^i(K_\cdot^A(f_1, \ldots, f_n))$. Из предыдущей задачи вытекает такое важное следствие:

Задача 5.11. Докажите, что имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \to H_i^A(f_2, \ldots, f_n) \xrightarrow{f_1} H_i^A(f_2, \ldots, f_n) \to \\ H_i^A(f_1, \ldots, f_n) \to H_{i-1}^A(f_2, \ldots, f_n) \xrightarrow{f_1} H_{i-1}^A(f_2, \ldots, f_n) \ldots \end{aligned} \tag{5.2}$$

Как мы отмечали, комплекс $K_\cdot^A(f_1, \dots, f_n)$, вообще говоря, не обязан быть резольвентой A-модуля $A/(f_1, \dots, f_n)$. Сейчас мы разберем важный случай, когда комплекс Кошуля резольвентой все-таки будет (и тем самым все соотношения и «высшие соотношения» между $f_1, \dots, f_n$ порождаются тривиальными — «кошулевскими»).

Последовательность $f_1, \dots, f_n \in A$, где A — коммутативное кольцо, называется *регулярной*, если f_1 не является делителем нуля в A, f_2 не является делителем нуля в $A/(f_1)$, f_3 не является делителем нуля в $A/(f_1, f_2)$, …, f_n не является делителем нуля в $A/(f_1, \dots, f_{n-1})$ («не является делителем нуля» означает, в частности, «отлично от нуля»).

Задача 5.12. Пусть $f_1, \dots, f_n \in A$ — регулярная последовательность. Докажите, что $H_i^A(f_n, f_{n-1}, \dots, f_1) = 0$ при $i > 0$.

Указание. Индукция по n с использованием точной последовательности (5.2).

В важных для геометрии случаях результат этой задачи допускает обращение. Именно, предположим, что кольцо A и его элементы $f_1, \dots, f_n$ удовлетворяют одному из следующих условий:

- A — кольцо многочленов, $f_1, \dots, f_n$ — однородные многочлены положительной степени;
- A — локальное кольцо алгебраического многообразия в данной точке x, $f_1, \dots, f_n$ — ростки функций, обращающихся в нуль в точке x.

Тогда из ацикличности комплекса Кошуля $K_\cdot^A(f_n, \dots, f_1)$ в степенях, отличных от нуля, вытекает регулярность последовательности $f_1, \dots, f_n$ (достаточно даже обращения в нуль $H_1^A(f_n, \dots, f_1)$). Нам этот результат не потребуется, и доказывать его мы не будем.

Независимость от выбора покрытия

Теперь мы можем доказать, что когомологии Чеха конечного аффинного открытого покрытия квазипроективного многообразия с коэффициентами в квазикогерентном пучке не зависят от выбора покрытия. Первый шаг в доказательстве таков. Мы рассматриваем аффинное многообразие X; положим $A = k[X]$, и пусть $f_1, \dots, f_n \in A$ — такие функции, что $\bigcup_i D(f_i) = X$. Обозначим покрытие многообразия X множествами $D(f_i)$ через $\mathfrak{U}$. Наша ближайшая цель — показать, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$ для любого квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ (не удивительно: результат задачи 4.25 подсказывает, что это равенство должно выполняться для *любого* конечного аффинного покрытия, и так оно, как мы далее увидим, и будет).

Начнем с самого важного частного случая. Именно, пусть $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Обращение в нуль старших когомологий Чеха $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в $\mathcal{F}$ равносильно ацикличности пополненного комплекса Чеха $\tilde{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$. Она доказывается следующим образом. Для каждого целого $m > 0$ рассмотрим подкомплекс $C^\cdot_m \subset \tilde{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, определенный так: $s \in \tilde{C}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ лежит в C^r_m тогда и только тогда, когда всякая $s_{i_0,\dots,i_r} \in A_{f_{i_0}\dots f_{i_r}}$ представима в виде $a/(f_{i_0}\dots f_{i_r})^m$, где $a \in A$. Неформально говоря, коцепи, лежащие в $C^\cdot_m$, «имеют полюса порядка не выше m».

Задача 5.13. Покажите, что $C^\cdot_m$ — действительно подкомплекс в $\tilde{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$, что $C^\cdot_m \subset C^\cdot_{m+1}$, и что $\tilde{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = \bigcup_{m>0} C^\cdot_m$.

Задача 5.14. Покажите, что из ацикличности комплексов $C^\cdot_m$ при всех достаточно больших m будет вытекать ацикличность комплекса $\tilde{C}^\cdot(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$.

Покажем теперь, что комплексы $C^\cdot_m$ действительно ацикличны (вообще при всех $m > 0$).

Задача 5.15. Покажите, что комплекс $C^\cdot_m$ изоморфен сдвинутому комплексу Кошуля $K^A_\cdot(f_1^m, -f_2^m, f_3^m, \dots, (-1)^{n-1}f_n^m)[1-n]$.

Указание. Гомоморфизм из сдвинутого комплекса Кошуля в $C^\cdot_m$ строится так. Пусть $e_{p_1,\dots,p_i}$ — элемент базиса K^A_i, где $i < n$. Ему соответствует следующая чеховская $(n-1-i)$-коцепь, определенная следующим образом. Пусть $q_1, q_2, \dots, q_{n-i}$ — элементы множества $[1;n] \setminus \{p_1,\dots,p_i\}$, записанные в порядке возрастания. Положим $s_{q_1,q_2,\dots,q_{n-i}} = 1/(f_{p_1}\dots f_{f_i})^r$ и $s_{t_1,t_2,\dots,t_{n-i}} = 0$ при $\{t_1,\dots,t_{n-i}\} \neq \{q_1,q_2,\dots,q_{n-i}\}$; элементу $e_{1,\dots,n} \in K^A_n$ соответствует $1 \in A = \tilde{C}^{-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X)$.

Задача 5.16. Покажите, что все комплексы $C^\cdot_m$ ацикличны.

Указание. Ввиду предыдущей задачи, надо только убедиться в ацикличности соответствующих комплексов Кошуля. Это следует из задачи 5.9: в самом деле, коль скоро $X = \bigcup D(f_i)$, то $(f_1,\dots,f_n) = A$ (теорема Гильберта о нулях). Выведите отсюда, что $(f_1^m,\dots,f_n^m) = A$ (постарайтесь обойтись без теоремы о нулях в этом выводе).

Сопоставляя результаты задач 5.16 и 5.15, получаем, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) = 0$ при $i > 0$, как и было обещано.

Задача 5.17. Пусть M — свободный A-модуль (не обязательно конечного ранга). Покажите, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \tilde{M}) = 0$ при $i > 0$.

Указание. Для модулей ранга 1 мы это уже знаем.

Задача 5.18. Покажите, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $i \geqslant n$ для *любого* пучка абелевых групп $\mathcal{F}$ на X.

Задача 5.19. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X. Покажите, что существует точная последовательность

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0, \tag{5.3}$$

где $\mathcal{E} = \tilde{M}$ для некоторого свободного A-модуля M.

Указание. Всякий модуль — фактормодуль свободного.

Задача 5.20. Пусть $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X. Покажите, что $H^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при всех $i > 0$.

Решение. Проведем убывающую индукцию по i. Для $i \geqslant n$ мы это уже знаем (задача 5.18). Пусть известно, что $\check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ для всех квазикогерентных пучков $\mathcal{F}$. Чтобы доказать, что $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$, рассмотрим последовательность когомологий, ассоциированную с точной последовательностью (5.3):

$$\dots \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \to \check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to \dots.$$

В ней $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0$ в силу результата задачи 5.17, а $\check{H}^{i+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = 0$ по предположению индукции. □

Перейдем к произвольным аффинным покрытиям. Пусть опять X — произвольное топологическое пространство. Если $U \subset X$ — открытое подмножество и $\mathfrak{U}$ — покрытие X, то $\{U_i \cap U\}_{i \in I}$ — покрытие U, которое мы будем обозначать $\mathfrak{U}|_U$.

Задача 5.21. Пусть покрытие $\mathfrak{U}$ конечно. Постройте гомоморфизм комплексов $\varphi\colon \tilde{C}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \tilde{C}(\mathfrak{U}|_U, \mathcal{F}|_U)$ и покажите, что конус $C(-\varphi)$ изоморфен $\tilde{C}(\mathfrak{U}', \mathcal{F})[1]$, где $\mathfrak{U}'$ — покрытие, получаемое добавлением множества U к покрытию $\mathfrak{U}$.

Задача 5.22. Пусть $\mathfrak{U}$ — конечное покрытие, $U \subset X$ — открытое подмножество, $\mathfrak{U}'$ — покрытие, получаемое добавлением множества U к покрытию $\mathfrak{U}$. Предположим, что $\check{H}^t(\mathfrak{U}|_U, \mathcal{F}|_U) = 0$ для всех $t > 0$. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^r(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ для всех r.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и точной последовательностью (1.4).

Задача 5.23. Пусть $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ — два конечных покрытия, причем каждый элемент покрытия $\mathfrak{U}_2$ содержится в каком-то элементе покрытия $\mathfrak{U}_1$ (как говорят, покрытие $\mathfrak{U}_2$ *вписано* в покрытие $\mathfrak{U}_1$). Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}_1, \mathcal{F}) \cong \check{H}^r(\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2, \mathcal{F})$ для всех r.

Указание. $\mathfrak{U}_2$ вообще не обязано быть покрытием: это может быть семейство открытых множеств, каждое из которых содержится в каком-то множестве из покрытия $\mathfrak{U}_1$. Проведите индукцию по числу элементов семейства $\mathfrak{U}_2$ (см. предыдущую задачу).

Пусть теперь по-прежнему X — аффинное многообразие и $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X.

Задача 5.24. Пусть $\mathfrak{U}$ обозначает аффинное покрытие вида $\bigcup_{i=1}^n D(f_i)$, и пусть $\mathfrak{V}$ — произвольный конечный набор аффинных открытых подмножеств X. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V},\mathcal{F}) = \check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0$.

Указание. Проведите индукцию по числу элементов в семействе $\mathfrak{V}$ с использованием задачи 5.22.

Задача 5.25. Докажите, что в любое открытое покрытие аффинного многообразия X можно вписать подпокрытие, составленное из множеств вида $D(f)$.

Задача 5.26. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0$ при $r > 0$, где $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X, а $\mathfrak{U}$ — конечное аффинное покрытие X.

Указание. Пусть $\mathfrak{V}$ — конечное покрытие множествами вида $D(f)$, вписанное в $\mathfrak{U}$. Выведите из предыдущих задач, что $\check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \check{H}^r(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V},\mathcal{F})$ и $\check{H}^r(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V},\mathcal{F}) = 0$.

Разобравшись с аффинными многообразиями, легко покончить и со всеми остальными.

Задача 5.27. Пусть X — алгебраическое многообразие, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — его конечные аффинные покрытия, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Докажите, что $\check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \check{H}^r(\mathfrak{V},\mathcal{F})$ для всех r.

Указание. Докажите, что обе группы когомологий изоморфны $\check{H}^r(\mathfrak{U}\cup\mathfrak{V},\mathcal{F})$; для этого воспользуйтесь задачами 5.22 и 5.26.

Определение когомологий квазикогерентных пучков

Теперь мы можем дать обещанное определение-времянку.

Определение 5.28. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный или квазикогерентный пучок на квазипроективном алгебраическом многообразии X. Тогда, по определению, $H^r(X,\mathcal{F}) = \check{H}^r(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ для какого-нибудь (стало быть, и любого) конечного аффинного покрытия $\mathfrak{U}$.

Напомним, что существование точной последовательности когомологий гарантируется результатом задачи 5.6.

В свете этого определения результат задачи 5.26 означает, что старшие когомологии когерентного или квазикогерентного пучка на аффинном многообразии тривиальны. Этот факт называется «теоремой B» Серра для аффинных многообразий; он является аналогом одноименной теоремы А. Картана для многообразий Штейна. Доказательство теоремы Серра гораздо проще, чем теоремы Картана, но и теорема Серра при любом изложении и любом выборе определения когомологий нетривиальна.

Задача 5.29. Пусть $i\colon Y \hookrightarrow X$ — замкнутое вложение и $\mathcal{F}$ — (квази)когерентный пучок на Y. Докажите, что $H^r(Y,\mathcal{F}) = H^r(X, i_*\mathcal{F})$ для всех r.

Указание. Пусть $\mathfrak{U}$ — аффинное открытое покрытие X и $\mathfrak{U}'$ — покрытие, высекаемое им на Y. Убедитесь, что $C^\cdot(\mathfrak{U}, i_*\mathcal{F})$ и $C^\cdot(\mathfrak{U}',\mathcal{F})$ — один и тот же комплекс.

Серровские вычисления и их следствия

Основа для этих вычислений — нахождение когомологий структурного пучка на проколотом аффинном пространстве $X = \mathbb{A}^{n+1} \setminus (0,\ldots,0)$. Всюду далее будем предполагать, что $n > 0$.

Вычисление H^0 совсем элементарно:

Задача 5.30. Покажите, что $H^0(X,\mathcal{O}_X) = k[T_0,\ldots,T_n]$ (иными словами, всякая регулярная функция на $X \subset \mathbb{A}^{n+1}$ продолжается на все $\mathbb{A}^{n+1}$).

Указание. Если рациональная функция $f \in k(T_0,\ldots,T_n)$ регулярна на X, то регулярны и ее ограничения на все подмножества $D(T_i) \subset X$. Функция, регулярная на $D(T_i)$, имеет вид h/T_i^m, где $h \in k[T_0,\ldots,T_n]$.

Для вычисления старших когомологий мы воспользуемся той же техникой аппроксимации, что при вычислении когомологий структурного пучка на аффинном многообразии. Именно, пусть $\mathfrak{V}$ — покрытие X аффинными открытыми множествами $D(T_i)$ для $i = 0,\ldots,n$. Для каждого $m > 1$ рассмотрим подкомплекс $C^\cdot_m \subset \tilde{C}^\cdot(\mathfrak{V},\mathcal{O}_X)$, определенный следующим образом: $s \in \tilde{C}^r(\mathfrak{V},\mathcal{O}_X)$ лежит в C^r_m тогда и только тогда, когда всякая $s_{i_0,\ldots,i_r}$ представима в виде $F/(T_{i_0}\ldots T_{i_r})^m$, где $F \in k[T_0,\ldots,T_n]$ (коцепи, лежащие в $C^\cdot_m$, имеют полюса порядка не выше m).

Задача 5.31. Покажите, что $C^\cdot_m$ — действительно подкомплекс в $\tilde{C}^\cdot(\mathfrak{V},\mathcal{O}_X)$, что $C^\cdot_m \subset C^\cdot_{m+1}$, и что $\tilde{C}^\cdot(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) = \bigcup_{m>0} C^\cdot_m$.

Задача 5.32. Покажите, что комплекс $C^{\cdot}_m$ изоморфен сдвинутому комплексу Кошуля $K^A_{\cdot}(T_0^m, -T_1^m, \ldots, (-1)^n T_n^m)[-n]$, где $A = k[T_0, \ldots, T_n]$.

Задача 5.33. Покажите, что $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ при $0 < i < n$.

Указание. Ввиду предыдущей задачи, это сводится к вопросу о комплексе Кошуля $K^A_{\cdot}(T_0^m, -T_1^m, \ldots, (-1)^n T_n^m)$. Покажите, что последовательность $(T_0^m, -T_1^m, \ldots, (-1)^n T_n^m)$ является регулярной.

Группа $H^n(X, \mathcal{O}_X)$, однако же, нулевой уже не будет. В самом деле:

Задача 5.34. Покажите, что $H^n(C^{\cdot}_m)$ изоморфно $(T_0T_1 \ldots T_n)^{-1}V$, где V — векторное пространство полиномов от $T_0^{-1}, \ldots, T_n^{-1}$, в которые каждый из (T_i^{-1}) входит в степени $\leqslant m$.

Указание. Ввиду задачи 5.32, $H^n(C^{\cdot}_m) \cong H_0(K^A_{\cdot}(T_0^m, \ldots, T_n^m))$.

Поскольку $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$ является объединением возрастающей последовательности комплексов $C^{\cdot}_m$, из результата предыдущей задачи можно найти и $H^n(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$:

Задача 5.35. Покажите, что $H^n(X, \mathcal{O}_X)$ изоморфно $(T_0T_1 \ldots T_n)^{-1}k[T_0^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]$. Точнее говоря: всякая n-коцепь в чеховском комплексе покрытия $\mathfrak{V}$ есть одно-единственное сечение $s_{0,1,\ldots,n} \in k[T_0, \ldots, T_n]_{T_0 \ldots T_n}$. Так вот, всякая n-коцепь когомологична какому-то элементу из $(T_0T_1 \ldots T_n)^{-1}k[T_0^{-1}, \ldots, T_n^{-1}]$, и все эти элементы представляют различные классы когомологий.

Разумеется, $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ при $i > n$. Кстати, нетривиальность когомологий структурного пучка у проколотого аффинного пространства $\mathbb{A}^m$ показывает, что при $m > 1$ это многообразие не аффинно.

От проколотого аффинного пространства легко перейти и к проективному:

Задача 5.36. Пусть $\mathbb{P}^n = X/k^*$, где $X = \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Обозначим через $\mathfrak{U}$ покрытие $\mathbb{P}^n$ аффинными подпространствами $\mathbb{A}^n_i = D(T_i)/k^*$ для $i = 0, \ldots, n$, и пусть $\mathfrak{V}$ — покрытие X, рассматривавшееся выше. Покажите, что

$$\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)),$$

причем прямому слагаемому $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) \subset \tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$ соответствует подкомплекс в $\tilde{C}^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$, состоящих из коциклов, все элементы которых являются однородными рациональными функциями степени r.

Задача 5.37. Докажите следующие факты про когомологии пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)$ (первый из этих фактов мы на самом деле уже знаем из задачи 3.13):

1) $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = 0$ при $r < 0$ и изоморфно пространству мономов степени r от $T_0, \ldots, T_n$ при $r \geqslant 0$ ($T_0, \ldots, T_n$ — однородные координаты).

2) $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = 0$ при $i > n$ и при $0 < i < n$ (для любого r).

3) $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = 0$ при $r > -n-1$.

4) Если $r \leqslant -n-1$, то $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = 0$ изоморфно пространству мономов степени $-(r+n+1)$ от $T_0^{-1}, \ldots, T_n^{-1}$ (в частности, это пространство одномерно при $r = -n-1$; мы подразумеваем, что каждый из T_i^{-1} имеет степень 1).

Результат этой задачи как раз и называется «серровским явным вычислением».

Из серровских вычислений легко выводятся две (также принадлежащие Серру) основные теоремы о когомологиях когерентных пучков на проективных многообразиях. Начнем с теоремы конечности.

Задача 5.38. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Докажите, что все $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ являются конечномерными пространствами над основным полем.

Решение. Серровское явное вычисление показывает, что утверждение верно для прямых сумм пучков вида $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s)$. Кроме того, при $i > n$ утверждение верно для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$: поскольку $\mathbb{P}^n$ обладает аффинным открытым покрытием из $n+1$ множества, $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = 0$ при $i > n$. Теперь проведем убывающую индукцию по i, как в задаче 5.20. Пусть уже доказано, что $H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ конечномерно для любого когерентного пучка $\mathcal{G}$, и пусть $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный пучок. В силу следствия проективной теоремы A (задача 4.37) существует точная последовательность когерентных пучков

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0,$$

в которой $\mathcal{E}$ — прямая сумма пучков вида $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s)$. Рассмотрим точную последовательность когомологий:

$$\cdots \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E}) \to H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G}) \to \ldots.$$

В ней $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{E})$ конечномерно в силу Серровского вычисления, а $H^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})$ — по предположению индукции. Следовательно, конечномерно и $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$. Все доказано. □

Доказанный результат немедленно обобщается на любые проективные многообразия:

Задача 5.39. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии X. Докажите, что все $H^i(X, \mathcal{F})$ являются конечномерными пространствами над основным полем.

Указание. См. задачу 5.29.

Из теоремы конечности вытекает, в частности, конечномерность пространства глобальных сечений когерентных (стало быть, любых локально свободных) пучков на проективном многообразии.

Еще одно следствие теоремы конечности:

Задача 5.40. Докажите, что всякая регулярная функция на проективном многообразии является константой.

Решение. Надо показать, что $H^0(X, \mathcal{O}_X)$, где X — проективное многообразие, совпадает с основным полем k. Заметим, что $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ — кольцо; оно не имеет делителей нуля (если $fg = 0$, то $X = V(f) \cup V(g)$; в силу неприводимости X отсюда вытекает, что либо f, либо g равна нулю) и, по теореме конечности, оно конечномерно над k. Однако конечномерная коммутативная алгебра над полем без делителей нуля является полем. Следовательно, $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ — конечное расширение алгебраически замкнутого поля k, откуда $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$. $\square$

Вторая основная теорема — теорема B для проективных многообразий.

Задача 5.41. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Докажите, что существует такое число n_0, что при всех $r > n_0$ имеем $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(r)) = 0$ при $i > 0$.

Указание. Если $\mathcal{F}$ — прямая сумма пучков вида $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(s)$, то это с очевидностью следует из вычислений Серра; далее примените убывающую индукцию по i, как в задаче 5.38.

Результат этой задачи также переносится на произвольные проективные многообразия:

Задача 5.42. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$. Докажите, что существует такое число n_0, что при всех $r > n_0$ имеем $H^i(X, \mathcal{F}(r)) = 0$ при $i > 0$.

Указание. См. задачу 5.29.