6. Некоторые приложения

Многочлен Гильберта

Начнем с общего определения. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок векторных пространств на топологическом пространстве X, и пусть $H^i(X,\mathcal{F})$ конечномерны при всех $i > 0$ и равны нулю при всех $i \gg 0$. Тогда *эйлеровой характеристикой* пучка $\mathcal{F}$ называется число

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i h^i(X,\mathcal{F}),$$

где через $h^i(X,\mathcal{F})$ обозначена (и далее будет обозначаться) $\dim H^i(X,\mathcal{F})$.

Задача 6.1. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пучков. Предположим, что для всех $\mathcal{F}_i$ определена эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F}_i)$. Докажите, что $\chi(\mathcal{F}_1) + \chi(\mathcal{F}_3) = \chi(\mathcal{F}_2)$.

Задача 6.2. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \cdots \to \mathcal{F}_n \to 0$$

— точная последовательность пучков. Предположим, что для всех $\mathcal{F}_i$ определена эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F}_i)$. Докажите, что $\sum_{i=0}^n (-1)^i \chi(\mathcal{F}_i) = 0$.

Указание. Длинную точную последовательность можно разрезать на короткие.

Ввиду того, что эйлерова характеристика аддитивна в точных последовательностях, вычислять ее легче, чем группы когомологий по отдельности. С другой стороны, она несет и меньше информации, чем группы когомологий. Например, эйлерова характеристика не меняется при непрерывной деформации пучка — значит, она непригодна для выделения случаев «необщего положения». Кроме того, непосредственный геометрический смысл имеют, как правило, H^i с малыми i (чаще всего H^0). Поэтому, подсчитав эйлерову характеристику пучка, нередко приходится еще думать, как от нее перейти к нужной нам, скажем, h^0. Ниже мы для этих целей воспользуемся теоремой B, гарантирующей, что для «достаточно подкрученных» пучков старшие когомологии обращаются в нуль и тем самым $h^0 = \chi$.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Тогда, в силу теоремы конечности, эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F})$ заведомо определена. Рассмотрим функцию $m \mapsto \chi(\mathcal{F}(m))$. Вскоре мы покажем, что эта функция всегда является многочленом от m; этот многочлен называется *многочленом Гильберта* пучка $\mathcal{F}$ и обозначается $P_{\mathcal{F}}$. Пока что же, предполагая существование многочлена Гильберта доказанным, выведем из него (существования) некоторые следствия.

Задача 6.3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество. Покажите, что $\chi(\mathcal{O}_X(m)) = h^0(\mathcal{O}_X(m))$ для всех $m \gg 0$.

Пусть R — кольцо многочленов $k[x_0, \dots, x_n]$, где $x_0, \dots, x_n$ — однородные координаты в $\mathbb{P}^n$. Имеем $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$, где $R_i \subset R$ — векторное подпространство, порожденное однородными многочленами степени i. С каждым замкнутым подмножеством $X \subset \mathbb{P}^n$ можно связать идеал $I_X \subset R$, порожденный однородными многочленами, тождественно обращающимися в нуль на X. Поскольку идеал I_X порожден однородными многочленами, он и сам *однороден,* иными словами, $I_X = \sum_i (I_X \cap R_i)$. Соответственно, факторкольцо $R_X = R/I_X$ будет *градуированным:* выполнено равенство $R_X = \bigoplus (R_X)_i$, где $(R_X)_i = R_i/(I_X \cap R_i)$, причем $R_i R_j \subset R_{i+j}$. Градуированное кольцо R_X называется *однородным координатным кольцом* замкнутого подмножества X. Геометрический смысл размерностей его компонент следующий: $\dim(R_X)_i$ — это коразмерность пространства однородных многочленов степени i, обращающихся в нуль всюду на X, в пространстве всех однородных многочленов степени i. Выражаясь на классическом языке, $\dim(R_X)_i$ есть число линейных условий, которые подмножество X накладывает на формы степени i.

Задача 6.4. Убедитесь в справедливости всех утверждений, оставленных в предыдущем абзаце без доказательства.

Задача 6.5. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество. Покажите, что функция $m \mapsto \dim(R_X)_m$ при всех $m \gg 0$ является многочленом.

Указание. Выведите из точной последовательности

$$0 \to \mathcal{I}_X(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \to \mathcal{O}_X(m) \to 0,$$

что $\dim(R_X)_m = h^0(\mathcal{O}_X(m))$ при всех $m \gg 0$.

Кстати, функция $m \mapsto \dim(R_X)_m$ называется *функцией Гильберта* подмножества X и обозначается $h_X(m)$. Тот факт, что при больших значениях аргумента функция Гильберта ведет себя как многочлен, можно доказать и без всяких когомологий.

Если $X \subset \mathbb{P}^n$ — замкнутое подмножество, то многочлен Гильберта пучка $\mathcal{O}_X$ называется также многочленом Гильберта подмножества X и обозначается $\mathcal{O}_X$. Все коэффициенты многочлена Гильберта имеют геометрический смысл; например, мы докажем, что его степень совпадает с *размерностью* множества X, старший коэффициент однозначно определяет *степень* (число точек пересечения с линейным подпространством дополнительной размерности). Это — важные инварианты многообразия X, причем степень зависит от вложения X в проективное пространство, а размерность — нет. Другой важный инвариант, также не зависящий от вложения, — это свободный член многочлена Гильберта. Его независимость от вложения очевидна, поскольку он равен $P_X(0) = \chi(X, \mathcal{O}_X)$. По историческим причинам принято рассматривать не прямо эйлерову характеристику структурного пучка, а число $p_a(X) = (-1)^{\dim X}(\chi(X, \mathcal{O}_X) - 1)$. Это число называется *арифметическим родом.* Если, например, X — неособая кривая над $\mathbb{C}$, то $p_a(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$ совпадает с числом ручек X как компактной римановой поверхности. Если у кривой X есть особенности, но при малом шевелении коэффициентов уравнений X получается неособая кривая, то $p_a(X)$ совпадает с числом ручек этой неособой кривой.

Теперь займемся доказательством того, что многочлен Гильберта данного когерентного пучка $\mathcal{F}$ действительно является многочленом. Доказательство будет проведено индукцией по размерности проективного пространства с помощью типичной операции «переход к гиперплоскому сечению».

Пусть вообще $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие многообразия X и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Тогда $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y$ — когерентный пучок на X, причем ограничение этого пучка на $X \setminus Y$ есть нулевой пучок. Стало быть, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y$ можно рассматривать как пучок на $\mathcal{O}_Y$. Легко видеть, что это пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей. Пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y$, рассматриваемый как пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей, обозначается иногда $\mathcal{F}|_Y$. Если $\mathcal{F}$ — пучок, соответствующий векторному расслоению E на X, то $\mathcal{F}|_Y$ соответствует его ограничению $E|_Y$. Типичный пример: пусть X аффинно, $A = k[X]$ и $I \subset A$ — идеал функций, обращающихся в нуль на Y, $\mathcal{F} = \tilde{M}$. Тогда $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y = \widetilde{M/IM}$.

Конкретизируем эту конструкцию для случая $X = \mathbb{P}^n$, $Y = \mathbb{P}^{n-1}$. Пусть s — сечение пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ (то есть линейная однородная функция от $x_0, \ldots, x_n$), множеством нулей которого является гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$.

Задача 6.6. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$. Докажите, что имеет место точная последовательность

$$\mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0, \tag{6.1}$$

в которой s — умножение на s.

Отображение u в этой точной последовательности мономорфизмом быть не обязано (например, если $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}$, то u — это вообще тождественный нуль), так что дополнить ее нулем слева не всегда возможно.

Тем не менее это можно сделать «почти всегда». Именно, верно следующее утверждение:

> Для данного когерентного пучка $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^n$ и общей линейной формы $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ последовательность
>
> $$0 \to \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0 \tag{6.2}$$
>
> точна (здесь $\mathbb{P}^{n-1} = V(s) \subset \mathbb{P}^n$).

Для доказательства этого утверждения нам придется разобраться, в каком случае умножение на данную функцию является мономорфизмом когерентного пучка; для этого, в свою очередь, потребуется совершить экскурс в коммутативную алгебру, а именно, познакомиться с важным понятием «ассоциированных простых идеалов». Хорошая ссылка на эту тему — [6, с. 172–177].

Задача 6.7. Пусть M — модуль над кольцом A и $\mathfrak{a} \subset A$ — идеал. Покажите, что M содержит подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{a}$, тогда и только тогда, когда существует элемент $m \in M$ такой, что $\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{a}$.

Задача 6.8. Пусть M — модуль над кольцом A. Покажите, что всякий максимальный элемент в множестве идеалов вида $\mathrm{Ann}(m)$ для всех $m \in M \setminus \{0\}$ является простым идеалом.

Решение. Пусть идеал $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ является максимальным во множестве аннуляторов ненулевых элементов модуля M; покажем, что идеал $\mathfrak{p}$ прост. В самом деле, пусть $fg \in \mathfrak{p}$, то есть $fgx = 0$. Нам надо показать, что f или g лежит в $\mathfrak{p}$. Если $f \notin \mathfrak{p}$, то $fx \neq 0$ и $\mathrm{Ann}(fx) \supset \mathrm{Ann}(x)$. Ввиду максимальности $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ в множестве аннуляторов имеем $\mathrm{Ann}(fx) = \mathfrak{p}$. Так как $g \in \mathrm{Ann}(fx) = \mathrm{Ann}(x)$, получаем, что $g \in \mathfrak{p}$. $\square$

Задача 6.9. Пусть M — ненулевой модуль над *нетеровым* кольцом A. Покажите, что M содержит подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал.

Если A — коммутативное кольцо, M — модуль над A и $\mathfrak{p} \subset A$ — такой простой идеал, что M содержит подмодуль, изоморфный $A/\mathfrak{p}$ (эквивалентно: $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ для некоторого $x \in M$), то говорят что простой идеал $\mathfrak{p}$ *ассоциирован* с модулем M. Множество всех простых идеалов, ассоциированных с модулем M, обозначается $\mathrm{Ass}(M)$. Как мы только что доказали, $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$ для ненулевого модуля M над нетеровым кольцом A.

Задача 6.10. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в кольце A. Покажите, что $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

Задача 6.11. Пусть M — модуль над нетеровым кольцом A. Покажите, что

$$\Big\{ f \in A \mid \text{гомоморфизм } M \xrightarrow{f} M \text{ не мономорфен} \Big\} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)} \mathfrak{p}.$$

Указание. Если $f \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, то умножение на f отправляет в нуль ненулевые элементы $A/\mathfrak{p} \subset M$. Обратно, если $M \xrightarrow{f} M$ — не мономорфизм, то $f \in \operatorname{Ann}(x)$ для некоторого $x \neq 0$; примените задачу 6.8.

Теперь покажем, что для конечно порожденного модуля над нетеровым кольцом количество ассоциированных простых идеалов конечно. Для начала — такой факт:

Задача 6.12. Пусть

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

— точная последовательность модулей над кольцом A. Покажите, что $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(M') \cup \operatorname{Ass}(M'')$.

Указание. Пусть $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$. Если $A/\mathfrak{p} \cap M' = 0$, то покажите, что $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M'')$; если $A/\mathfrak{p} \cap M' \neq 0$, то покажите, что аннулятор любого ненулевого элемента из этого пересечения совпадает с $\mathfrak{p}$.

Задача 6.13. Пусть M — конечно порожденный модуль над нетеровым кольцом A. Покажите, что существует конечная фильтрация

$$M = M_n \supset M_{n-1} \supset \cdots \supset M_1 \supset M_0 = 0$$

такая, что все M_i/M_{i-1} изоморфны $A/\mathfrak{p}_i$ для каких-то простых идеалов $\mathfrak{p}_i \subset A$.

Указание. Существование модуля $M_1 \cong A/\mathfrak{p}_0$ вытекает из непустоты $\operatorname{Ass}(M)$. Для нахождения M_2 воспользуйтесь непустотой $\operatorname{Ass}(M/M_1)$, и т. д.

Задача 6.14. Пусть M — конечно порожденный модуль над нетеровым кольцом A. Покажите, что множество $\operatorname{Ass}(M)$ конечно.

Теперь мы можем доказать, что для почти всех $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ последовательность (6.2) точна (в том числе и слева).

Задача 6.15. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathbb{P}^n$ и $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Покажите, что гомоморфизм $\mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F}$ мономорфен тогда и только тогда, когда для всех $i \in [0; n]$ умножение на s/x_i является мономорфизмом модуля $H^0(\mathbb{A}^n_i, \mathcal{F}(-1))$ в себя.

Задача 6.16. Покажите, что существует конечное число проективных подмногообразий $Y_1, \dots, Y_N \subset \mathbb{P}^n$, отличных от всего $\mathbb{P}^n$, таких, что для всякого сечения $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, не обращающегося тождественно в нуль ни на одном из Y_i, гомоморфизм $\mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F}$ мономорфен.

Указание. Для каждого $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(H^0(\mathbb{A}^n_i, \mathcal{F}(-1)))$ рассмотрите многообразие $V(\mathfrak{p}) \subset \mathbb{A}^n_i$ и его замыкание в $\mathbb{P}^n$.

Про геометрический смысл $\mathrm{Ass}(M)$ можно сказать и побольше; в дальнейшем мы еще раз обратимся к этой тематике. А пока что докажем наконец, что многочлен Гильберта действительно является многочленом.

Задача 6.17. Пусть уже доказано, что функция $r \mapsto \chi(\mathcal{G}(r))$ будет многочленом для всех когерентных пучков $\mathcal{G}$ на $\mathbb{P}^{n-1}$. Покажите, что функция $r \mapsto \chi(\mathcal{F}(r))$ будет многочленом для всех когерентных пучков $\mathcal{F}$ на $\mathbb{P}^n$.

Указание. Выберите гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ таким образом, чтобы последовательность (6.2) была точна; тогда $\chi(\mathcal{F}(r)) - \chi(\mathcal{F}(r-1)) = \chi(\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}}(r))$.

Осталось проверить «базу индукции»: случай $n = 1$. В этом случае для почти всех $s \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ имеем точную последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G} \to 0,$$

где когерентный пучок $\mathcal{G}$ сосредоточен в одной точке — нуле сечения s. Очевидно, что $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}(r)$ для всех r, так что $\chi(\mathcal{G}(r))$ не зависит от r, откуда следует, что $r \mapsto \chi(\mathcal{F}(r)$ — линейный многочлен.

Задача 6.18. Докажите утверждения, оставленные без доказательства в предыдущем абзаце.

Размерность, особость и неособость

В этом разделе мы сформулируем без доказательства несколько фактов, относящихся к основаниям алгебраической геометрии. Большинство из них хорошо согласуются с интуицией, но их строгие доказательства довольно утомительны.

Начнем с определения размерности. Пусть X — алгебраическое многообразие. Тогда *размерностью* многообразия X называют максимальную длину цепочек вида

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X,$$

где все X_j — неприводимые замкнутые подмножества и все включения строгие (длина цепочки — число n). Как отмечал Ю.И. Манин, это определение аналогично определениям из «Начал» Евклида: «оконечность поверхности есть линия, оконечность же линии есть точка ... ».

Вот основные свойства размерности.

(1) $\dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = n$.

(2) Если X — алгебраическое многообразие, f — регулярная функция на X и $V(f) \subset X$ — множество ее нулей, то все компоненты $V(f)$ имеют размерность в точности $\dim X - 1$.

Задача 6.19. Выведите свойство (1) из свойства (2) и определения размерности.

Указание. Проведите индукцию по n.

(3) Если $f\colon X \to Y$ — морфизм проективных многообразий, причем $f(X) = Y$ и все слои f конечны, то $\dim X = \dim Y$.

Теперь перейдем к определениям особых и неособых точек. Будем исходить из следующего примера. Пусть f — неприводимый многочлен от n переменных и $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$. Тогда точка $p \in X$ будет неособой, если не все частные производные многочлена f обращаются в нуль в этой точке. Чтобы дать определения для общего случая, определим касательные пространства. Именно, *касательным пространством Зарисского* к замкнутому подмножеству $X \subset \mathbb{A}^n$ в точке $p = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ называется аффинное подпространство в $\mathbb{A}^n$, заданное системой уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} (\partial f/\partial T_i)(p)(T_i - a_i) = 0 \tag{6.3}$$

для всех $f \in I(X)$ (через $I(X) \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ обозначен идеал функций, обращающихся в нуль на X).

В этом определении вместо «для всех $f \in I(X)$» можно сказать «для всех f из некоторой системы образующих идеала $I(X)$». Касательное пространство Зарисского обозначается $T_pX \subset \mathbb{A}^n$.

В нашем примере с $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ касательное пространство Зарисского в особой точке будет совпадать со всем $\mathbb{P}^n$, в то время как касательное пространство в неособой точке $p = (a_1, \ldots, a_n)$ — гиперплоскость, заданная уравнением

$$(\partial f/\partial T_1)(p)(T_1 - a_1) + \cdots + (\partial f/\partial T_n)(p)(T_n - a_n).$$

У определения касательного пространства есть и «проективный» вариант: *касательным пространством Зарисского* к замкнутому подмножеству $X \subset \mathbb{P}^n$ в точке $p = (x_0 : \cdots : x_n) \in X$ называется линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$, заданное системой уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} (\partial F/\partial X_i)(x_0, \ldots, x_n) \cdot x_i = 0$$

для всех $F \in I(X)$ (на сей раз $I(X)$ обозначает *однородный* идеал X).

И в этом определении можно брать не все однородные многочлены, зануляющиеся на X, а ограничиться образующими идеала I_X.

«Аффинное» и «проективное» определения касательного пространства согласованы друг с другом: если $X \subset \mathbb{A}^n_0$ — замкнутое подмножество, $\mathbb{A}^n_0 \subset \mathbb{P}^n$ и $p \in X$, причем $T_pX \subset \mathbb{A}^n_0$ — касательное пространство к X в точке p в смысле «аффинного» определения, то $\overline{T_pX} \subset \mathbb{P}^n$ — касательное пространство к $\overline{X}$ в точке p в смысле «проективного» определения (черта обозначает замыкание в $\mathbb{P}^n$).

Можно показать, что $\dim T_pX \geqslant \dim X$ для всех $p \in X$, где X — аффинное (или проективное) многообразие. Точка $p \in X$ называется *неособой,* если $\dim T_pX = \dim X$, и *особой,* если $\dim T_pX > \dim X$. Убедитесь, что это определение согласуется с нашим примером гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$.

При данном нами определении неособости неясно даже, не зависит ли это понятие от выбора вложения: вдруг при одном вложении многообразия в $\mathbb{P}^n$ данная точка будет особой, а при другом — неособой? На самом деле у касательных пространств (соответственно, у неособых точек) есть инвариантное определение. Именно, пусть $\mathcal{O}_x$ — локальное кольцо точки x на многообразии X. Рассмотрим идеалы $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ (напомним, что он состоит из ростков функций, обращающихся в нуль в точке x) и $\mathfrak{m}_x^2 \subset \mathfrak{m}_x$. Тогда векторное пространство $\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k)$ называется *касательным пространством Зарисского* к X в точке x и обозначается $\mathcal{T}_xX$, а двойственное к нему пространство $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ называется *кокасательным пространством Зарисского.* Если $f\colon X \to Y$ — морфизм алгебраических многообразий и $f(x) = y$, то возникают естественный гомоморфизм $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и двойственный к нему гомоморфизм $f_*\colon \mathcal{T}_xX \to \mathcal{T}_yY$. Другой (эквивалентный) вариант определения касательного пространства таков: $\mathcal{T}_xX$ есть множество «дифференцирований из O_x в k над k», где дифференцированием называется k-линейное отображение $D\colon \mathcal{O}_x \to k$, для которого выполнена формула Лейбница: $D(fg) = f(0)D(g) + g(0)D(f)$. Из этой формулы очевидно, что дифференцирование обращается в нуль на $\mathfrak{m}_x^2$, откуда получаем вложение пространства дифференцирований в $\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k)$; можно показать, что это вложение является изоморфизмом. Согласно нашим определениям, всякий росток $f \in \mathfrak{m}_x$ определяет элемент пространства

$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ и тем самым линейный функционал на двойственном к нему касательном пространстве Зарисского $\mathcal{T}_xX$; этот функционал называется *дифференциалом* функции (точнее, ростка) f и обозначается d_xf.

Связь с прежним определением касательного пространства устанавливается следующим образом. Если $X = \mathbb{A}^n$ и $x \in X$, то $\mathcal{T}_xX$ есть векторное пространство, соответствующее аффинному пространству $\mathbb{A}^n$ (именно, вектору $(v_1, \ldots, v_n)$ соответствует дифференцирование $f \mapsto \sum v_i \cdot (\partial f/\partial X_i)(x)$). Если теперь $i\colon X \subset \mathbb{A}^n$ — вложение, то $T_xX \subset \mathbb{A}^n$ есть аффинное подпространство, полученное откладыванием от точки x векторного пространства $i_*(\mathcal{T}_xX)$.

Перечислим теперь нужные нам свойства особых и неособых точек и касательных пространств Зарисского.

1. Множество неособых точек алгебраического многообразия X открыто по Зарисскому и непусто.

2. Пусть $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ — идеал, $V = V(I)$ — соответствующий ему росток подмногообразия («множество нулей функций из I»). Тогда $I = I(V)$ (то есть I является идеалом *всех* ростков, тождественно обращающихся в нуль на V) в том и только том случае, когда подпространство $\mathcal{T}_xV \subset \mathcal{T}_xX$ совпадает с пересечением ядер дифференциалов d_xf для всех $f \in I$ (или, что равносильно, для всех f из некоторого семейства образующих идеала I). [Вообще говоря, это пересечение ядер может быть строго больше, чем $\mathcal{T}_xV$: рассмотрите случай $X = \mathbb{A}^2$, $x = (0,0)$, $I = (x_1^2)$].

3. Если точка $x \in X$ неособа, то кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ есть кольцо с однозначным разложением на множители.

Задача 6.20. Пусть $x \in X$ — неособая точка и $f \in \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$. Предположим, что $d_xf \neq 0$. Покажите, что:

1. f — неприводимый элемент кольца $\mathcal{O}_x$;

2. Росток подмногообразия $V = V(f)$ неприводим (применительно к ростку неприводимость означает, что он имеет только одну компоненту, проходящую через x) и неособ в точке x.

3. $I(V) = (f)$.

По индукции из результата этой задачи получится вот что:

Задача 6.21. Пусть $x \in X$ –неособая точка и $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{m}_x$. Предположим, что дифференциалы $d_xf_1, \ldots, d_xf_m$ линейно независимы. Тогда:

1. Росток подмногообразия $V = V(f_1, \ldots, f_n)$ неприводим и неособ в точке x.

2. $I(V) = (f_1, \dots, f_n)$.

3. Последовательность $f_1, \dots, f_n$ регулярна.

Вернемся к геометрии. Пусть $V_1, \dots, V_r \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхности. Будем говорить, что они *трансверсальны,* если для всякой точки $x \in V_1 \cap \dots \cap V_r$ пересечение касательных пространств $T_x V_1 \cap \dots T_x V_r$ имеет размерность $n - r$ (заметим, что из этого, в частности, следует, что все V_i неособы в точке x). Если гиперповерхности $V_1, \dots, V_r \subset \mathbb{P}^n$ трансверсальны, то их пересечение X называется *полным пересечением.* С точки зрения «внешней геометрии» полные пересечения — самый простой класс проективных многообразий. Наша ближайшая цель — показать, что полное пересечение X положительной размерности будет проективно нормально (иными словами, что гомоморфизм $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(t))$ будет эпиморфизмом при всех $t \geqslant 0$). Вот как это делается.

Задача 6.22. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие. Покажите, что X будет t-нормальным (то есть гомоморфизм $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(t))$ будет эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X(t)) = 0$.

Чтобы убедиться в занулении $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_X(t))$, построим для этого пучка резольвенту. Это делается так. Пусть F_i — уравнение гиперповерхности V_i (подразумевается, что многочлен F_i неприводим), и пусть $d_i = \deg F_i = \deg V_i$. Через $s_i \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t + d_i)$ обозначим гомоморфизм, задаваемый умножением на F_i (для разных t это, естественно, разные гомоморфизмы, но от того, что мы их обозначим одинаково, путаницы не возникнет). Положим $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ и $\mathcal{E}_i = \bigoplus_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_i \leqslant r} \mathcal{L}_{j_1, \dots, j_i}$, где $\mathcal{L}_{j_1, \dots, j_i} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d_{j_1} - \dots - d_{j_i})$, и построим комплекс

$$0 \to \mathcal{E}_r \to \mathcal{E}_{r-1} \to \dots \to \mathcal{E}_0 \to 0, \tag{6.4}$$

в котором дифференциалы устроены следующим образом. Каждый гомоморфизм из $\mathcal{E}_i$ в $\mathcal{E}_{i-1}$ задается набором гомоморфизмов из $\mathcal{L}_{j_1, \dots, j_i}$ в $\mathcal{L}_{t_1, \dots, t_{i-1}}$. Так вот, этот набор выглядит так: гомоморфизм из $\mathcal{L}_{j_1, \dots, j_i}$ в $\mathcal{L}_{j_1, \dots, \widehat{j_t}, \dots, j_i}$ (крышка над индексом означает, что он опускается) имеет вид $(-1)^{t-1} s_{j_t}$, а гомоморфизмы из $\mathcal{L}_{j_1, \dots, j_i}$ в $\mathcal{L}_{t_1, \dots, t_{i-1}}$, для которых последовательность $(t_1, \dots, t_{i-1})$ не получается удалением одного элемента из последовательности $(j_1, \dots, j_i)$, равны нулю.

Задача 6.23. Покажите, что то, что получилось, действительно является комплексом.

Задача 6.24. Пусть $x \in \mathbb{A}^n_l \subset \mathbb{P}^n$. Покажите, что комплекс слоев в точке x

$$0 \to (\mathcal{E}_r)_x \to (\mathcal{E}_{r-1})_x \to \dots \to (\mathcal{E}_0)_x \to 0,$$

соответствующий комплексу (6.4), изоморфен комплексу Кошуля $K.(f_1, \dots, f_m)$, где $f_j = F_j/x_l^j$.

Задача 6.25. Покажите, что комплекс (6.4) ацикличен в степенях, отличных от нуля, и что его нулевая гомология изоморфна $\mathcal{O}_X$.

Задача 6.26. Пусть $X = V_1 \cap \dots \cap V_r \subset \mathbb{P}^n$ — полное пересечение положительной размерности. Покажите, что $H^1(\mathcal{I}_X(t)) = 0$ при всех t.

Указание. Положим $\mathcal{E}_i(t) = \mathcal{K}_i$. Тогда получится точная последовательность

$$0 \to \mathcal{K}_r \to \mathcal{K}_{r-1} \to \dots \to \mathcal{K}_0 \to \mathcal{I}_X(r) \to 0.$$

Разобьем ее на короткие:

$$0 \to \mathcal{Z}_0 \to \mathcal{K}_0 \to \mathcal{I}_X(r) \to 0$$
$$0 \to \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{K}_1 \to \mathcal{Z}_0 \to 0$$
$$0 \to \mathcal{Z}_2 \to \mathcal{K}_2 \to \mathcal{Z}_1 \to 0 \dots$$

и воспользуемся тем, что, ввиду Серровского вычисления, $H^i(K_j) = 0$ при всех j и при $0 < i < n$.

В случае, когда $r = n$, полное пересечение — конечное множество точек. Точная последовательность (6.4) позволяет подсчитать их количество.

Задача 6.27. Покажите, что при $r = n$ комплекс (6.4) ацикличен в степенях, отличных от нуля, и что его нулевая гомология изоморфна прямой сумме пучков $\mathcal{O}_x$ для всех $x \in V_1 \cap \dots \cap V_r$ (пучок $\mathcal{O}_x$ — это «небоскреб», сосредоточенный в точке x: группа его сечений над $U \not\ni x$ есть нуль, а группа его сечений над $U \ni x$ есть основное поле k).

Задача 6.28. Покажите, что старшие группы когомологий «небоскреба» равны нулю.

Указание. Покажите, что его пополненный комплекс Чеха изоморфен сдвигу комплекса Кошуля $K_.^k(\pm 1, \dots, \pm 1)$.

Задача 6.29. Покажите, что $\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)) = \binom{n+r}{r}$.

Задача 6.30. Пусть $V_1, \dots, V_n$ — n штук трансверсальных гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$, причем $\deg V_i = d_i$. Покажите, что пересечение $X = V_1 \cap \dots \cap V_n$ состоит из $d_1 d_2 \dots d_n$ точек.

Решение. Обозначим число точек X через N. Пусть $\mathbb{R}.$ — комплекс (6.4) при $r = n$. Из задач 6.27 и 6.28 следует, что $\chi(H^0(\mathcal{K}.)) = N$. Теперь из задачи 6.2 вытекает, что

$$N = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \chi(\mathcal{E}_i). \tag{6.5}$$

Ввиду задачи 6.29 слагаемые в правой части выражаются через биномиальные коэффициенты, после чего можно найти N в явном виде. Интереснее, однако, вместо выкладок с биномиальными коэффициентами пойти по такому пути. Рассмотрим комплекс (6.4), в котором положено $F_1 = X_1^{d_1}, \ldots, F_n = X_n^{d_n}$. Легко видеть (докажите!), что он также ацикличен в степенях, отличных от нуля, а его нулевая гомология представляет собой прямую сумму $d_1 d_2 \ldots d_n$ небоскребов, сосредоточенных в точке $(1 : 0 : \cdots : 0)$. Следовательно, его эйлерова характеристика, которая также вычисляется по формуле (6.5), равна $d_1 d_2 \ldots d_n$. Все доказано. $\square$

Доказанный нами факт называется теоремой Безу. Наше доказательство этой теоремы в каком-то смысле параллельно тем, в которых гиперповерхности вырождаются. С научной точки зрения успех этого доказательства связан с тем, что эйлерова характеристика пучка не меняется при его непрерывной деформации. Подробнее по этому поводу см. книгу [7].

Наконец, применим тот же прием для интерпретации старшего члена многочлена Гильберта многообразия.

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, $\dim X = m$. Можно показать (мы этого делать не будем), что существуют m штук гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_m$ таких, что пересечение $Z = H_1 \cap \ldots H_m \cap X$ трансверсально (в частности, не содержит особых точек X). Обозначим количество точек в этом пересечении через d. Мы покажем, что старший член многочлена Гильберта $P_X(t)$ имеет вид $(d/m!)t^m$. Делается это так:

Задача 6.31. Постройте комплекс пучков

$$0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{K}_{m-1} \to \cdots \to \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_0 \to 0,$$

в котором $\mathcal{K}_0 = \mathcal{O}_X$ и $\mathcal{K}_i = \mathcal{O}_X(-i)^{\binom{m}{i}}$, обладающий следующими свойствами: в степени, отличной от 0, он ацикличен, а его нулевая гомология изоморфна $\bigoplus_{z \in Z} \mathcal{O}_z$.

Задача 6.32. Покажите, что число точек во множестве Z равно

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P_X(t-i)$$

для всех $t \in Z$.

Осталось применить чисто алгебраический результат:

Задача 6.33. Пусть P — многочлен от одной переменной. Покажите, что многочлен

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}P(t-i)$$

является ненулевой константой d тогда и только тогда, когда $\deg P = m$, и при этом старший член P равен $(d/m!)t^m$.

7. Общее определение когомологий

Вернемся к произвольным пучкам абелевых групп (или векторных пространств) на произвольных пространствах (для определенности будем считать, что имеем дело с пучками абелевых групп, и писать просто «пучок»).

Чтобы построить теорию когомологий для произвольных пучков на произвольных пространствах, нам потребуется понятие вялого пучка. По определению, пучок $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *вялым*[8], если всякое сечение $\mathcal{F}$ над всяким открытым подмножеством $U \subset X$ продолжается до сечения над всем X.

Приведем примеры вялых пучков. Во-первых, в некоторых случаях вялыми будут постоянные пучки.

Задача 7.1. Покажите, что ненулевой постоянный пучок на связном пространстве X является вялым тогда и только тогда, когда пространство X неприводимо.

Вот второй пример вялого пучка: X — произвольное топологическое пространство, $\mathcal{F}(U)$ — группа всех (не обязательно непрерывных) функций из U в $\mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}$ — вялый пучок.

Следующая задача показывает, что при любом разумном построении теории когомологий старшие (уж по крайней мере первые) когомологии вялых пучков должны обращаться в нуль.

Задача 7.2. Пусть

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \to 0$$

— точная последовательность пучков, в которой пучок $\mathcal{E}$вял. Докажите, что отображение $\Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{G})$ эпиморфно.

Указание. Пусть $s \in \mathcal{G}(X)$. Нам надо поднять s до сечения $t \in \mathcal{F}(X)$. По крайней мере, существует такое открытое покрытие $X = \bigcap_{i\in I} U_i$, что $s|_{U_i}$ поднимается до сечения $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ для всех $i \in I$. Ключевое место

[8] В русском переводе книги Р. Хартсхорна «Алгебраическая геометрия» вялые пучки названы плоскими.