Осталось применить чисто алгебраический результат:

Задача 6.33. Пусть P — многочлен от одной переменной. Покажите, что многочлен
$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}P(t-i)$$
является ненулевой константой d тогда и только тогда, когда $\deg P = m$, и при этом старший член P равен $(d/m!)t^m$.

7. Общее определение когомологий

Вернемся к произвольным пучкам абелевых групп (или векторных пространств) на произвольных пространствах (для определенности будем считать, что имеем дело с пучками абелевых групп, и писать просто «пучок»).

Чтобы построить теорию когомологий для произвольных пучков на произвольных пространствах, нам потребуется понятие вялого пучка. По определению, пучок $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *вялым*[8], если всякое сечение $\mathcal{F}$ над всяким открытым подмножеством $U \subset X$ продолжается до сечения над всем X.

Приведем примеры вялых пучков. Во-первых, в некоторых случаях вялыми будут постоянные пучки.

Задача 7.1. Покажите, что ненулевой постоянный пучок на связном пространстве X является вялым тогда и только тогда, когда пространство X неприводимо.

Вот второй пример вялого пучка: X — произвольное топологическое пространство, $\mathcal{F}(U)$ — группа всех (не обязательно непрерывных) функций из U в $\mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}$ — вялый пучок.

Следующая задача показывает, что при любом разумном построении теории когомологий старшие (уж по крайней мере первые) когомологии вялых пучков должны обращаться в нуль.

Задача 7.2. Пусть
$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \to 0$$
— точная последовательность пучков, в которой пучок $\mathcal{E}$вял. Докажите, что отображение $\Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{G})$ эпиморфно.

Указание. Пусть $s \in \mathcal{G}(X)$. Нам надо поднять s до сечения $t \in \mathcal{F}(X)$. По крайней мере, существует такое открытое покрытие $X = \bigcap_{i\in I} U_i$, что $s|_{U_i}$ поднимается до сечения $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ для всех $i \in I$. Ключевое место

[8] В русском переводе книги Р. Хартсхорна «Алгебраическая геометрия» вялые пучки названы плоскими.

таково: пусть $s|_{U_1}$ и $s|_{U_2}$ поднимаются до t_1 и t_2 соответственно; тогда $s|_{U_1\cup U_2}$ поднимается до некоторого $t\in\mathcal{F}(U_1\cup U_2)$. В самом деле, пусть $u=t_1|_{U_1\cap U_2}-t_2|_{U_1\cap U_2}\in\mathcal{F}(U_1\cap U_2)$. Если $u=0$, то все уже готово. В противном случае заметим, что $j(u)=0\in\mathcal{G}((U_1\cap U_2)$, откуда $u=i(v)$, где $v\in\mathcal{E}(U_1\cap U_2)$. Поскольку пучок $\mathcal{E}$ вял, сечение v продолжается до сечения $\bar{v}\in\mathcal{E}(X)$. Положим $t_2'=t_2+i(\bar{v})$; тогда сечения t_1 и t_2' склеиваются в сечение $\mathcal{F}$ над $U_1\cup U_2$, образ которого равен $s|_{U_1\cup U_2}$.

Если бы покрытие было конечно, то доказательство завершалось бы индукцией по числу его элементов; в общем случае надо воспользоваться какой-нибудь разновидностью трансфинитной индукции. Например, леммой Цорна: рассмотрим частично упорядоченное множество, элементы которого — пары (U,t), где $t\in\mathcal{F}(U)$ и $j(t)=s|_U$ ....

Большинство встречающихся в приложениях пучков вялыми отнюдь не являются. Следующий пример вялого пучка важен с общетеоретической точки зрения. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на пространстве X. Определим пучок $C^0(\mathcal{F})$ (пучок разрывных сечений) так: $C^0(\mathcal{F})(U)$ есть множество семейств вида $\{s_x\}_{x\in U}$, где $s_x\in\mathcal{F}_x$ (в отличие от встречавшихся нам аналогичных конструкций, никаких условий на взаимосвязь s_x для различных x не накладывается). Очевидно, $C^0(\mathcal{F})$ — действительно пучок, а не просто предпучок, и столь же очевидно, что этот пучок является вялым.

Задача 7.3. Пусть $\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2$ — гомоморфизм пучков. Постройте по нему естественный гомоморфизм пучков $C^0(\mathcal{F}_1)\to C^0(\mathcal{F}_2)$ и докажите, что он обладает следующим свойством. Пусть

$$0\to\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2\to\mathcal{F}_3\to 0$$

— точная последовательность пучков. Тогда последовательность

$$0\to C^0(\mathcal{F}_1)\to C^0(\mathcal{F}_2)\to C^0(\mathcal{F}_3)\to 0$$

тоже точна (по-ученому: функтор $C^0(\cdot)$ является точным).

Давайте теперь поймем, как можно строить теорию когомологий в общем случае. Предположим, теория когомологий (в том смысле, как объяснено в начале разд. 4) уже построена. Тогда когомологии пучков можно вычислять с помощью так называемых резольвент. Сначала — подготовительная задача:

Задача 7.4. Пусть в точной последовательности (пучков абелевых групп на пространстве X)

$$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{K}\to\mathcal{Z}\to 0$$

пучок $\mathcal{K}$ обладает тем свойством, что $H^i(X, \mathcal{K}) = 0$ при всех $i > 0$ (такие пучки называются *ацикличными*). Докажите, что:

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{K}) \to \Gamma(X, \mathcal{Z}));$$
$$H^1(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Coker}(\Gamma(X, \mathcal{K}) \to \Gamma(X, \mathcal{Z}));$$
$$H^i(X, \mathcal{F}) = H^{i-1}(X, \mathcal{Z}) \qquad \text{при } i > 0.$$

Пусть теперь $\mathcal{K}^{\cdot}$ — любой комплекс пучков на пространстве X. С ним можно связать комплекс абелевых групп

$$\dots \to \Gamma(X, \mathcal{K}^{i-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^i) \to \Gamma(X, \mathcal{K}^{i+1}) \to \dots,$$

обозначаемый $\Gamma(X, \mathcal{K}^{\cdot})$.

Задача 7.5. Пусть $\mathcal{F}$ –пучок абелевых групп на пространстве X, и пусть комплекс пучков $\mathcal{K}^{\cdot}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathcal{K}^i = 0$ при $i < 0$.

2) $H^0(\mathcal{K}^{\cdot}) = \mathcal{F}$, $H^i(\mathcal{K}^{\cdot}) = 0$ при $i \neq 0$ (комплексы, удовлетворяющие условиям (1) и (2), называются *резольвентами* пучка $\mathcal{F}$);

3) Все пучки $\mathcal{K}^i$ ацикличны.

Докажите, что $H^i(\Gamma(X, \mathcal{K}^{\cdot})) = H^i(X, \mathcal{F})$.

Указание. Разрежьте комплекс $\mathcal{K}^{\cdot}$ на короткие точные последовательности

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{K}^0 & \to & \mathcal{Z}^1 & \to & 0 & & & & & & \\
 & & & & 0 & \to & \mathcal{Z}^1 & \to & \mathcal{K}^1 & \to & \mathcal{Z}^2 & \to & 0 & & \\
 & & & & & & & & 0 & \to & \mathcal{Z}^2 & \to & \mathcal{K}^2 & \to & \mathcal{Z}^3 \ \to \ 0 \dots
\end{array}$$

и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Кстати говоря, если даже пучки, из которых составлена резольвента, не ацикличны, то некоторую информацию о когомологиях пучка $\mathcal{F}$ можно получить с помощью спектральных последовательностей.

Итак, для построения когомологий разумно использовать резольвенты, составленные из пучков, которые разумно считать ацикличными; в качестве таковых выберем, руководствуясь результатом задачи 7.2, вялые пучки. А чтобы с определением было удобно работать, резольвенту будем выбирать каноническим образом. Именно, для данного пучка $\mathcal{F}$ выберем естественное вложение $\mathcal{F} \hookrightarrow C^0(\mathcal{F})$; рассмотрим факторпучок $C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}$, обозначим $C^1(\mathcal{F}) = C^0(C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F})$, и пусть $d^0 \colon C^0(\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{F})$ — сквозное отображение в такой диаграмме:

$$\begin{tikzcd} C^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "d^0"'] & C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F} \arrow[r, hook] & C^1(\mathcal{F}). \end{tikzcd}$$

Далее, положим $C^2(\mathcal{F}) = C^0(\operatorname{Coker} d^0)$, и пусть $d^1\colon C^1(\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{F})$ — такое сквозное отображение:

$$\begin{tikzcd} C^0(\mathcal{F}) \arrow[r, "d^0"] & C^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "d^1"'] & \operatorname{Coker} d^0 \arrow[r, hook] & C^2(\mathcal{F}). \end{tikzcd}$$

Продолжая в том же духе, получим последовательность вялых пучков и гомоморфизмов:

$$0 \to C^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{d^2} \dots$$

Комплекс $C^{\cdot}(\mathcal{F})$ называется *резольвентой Годемана* пучка $\mathcal{F}$.

Задача 7.6. Покажите, что гомоморфизм пучков $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ индуцирует естественный гомоморфизм резольвент Годемана $C^{\cdot}(\mathcal{F}_1) \to C^{\cdot}(\mathcal{F}_2)$, обладающий следующим свойством. Пусть

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

— точная последовательность пучков. Тогда последовательность

$$0 \to C^{\cdot}(\mathcal{F}_1) \to C^{\cdot}(\mathcal{F}_2) \to C^{\cdot}(\mathcal{F}_3) \to 0$$

тоже точна.

Теперь мы можем дать основное определение. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве X. Тогда его i-той группой когомологий $H^i(X,\mathcal{F})$ (или просто $H^i(\mathcal{F})$, если из контекста ясно, о каком пространстве идет речь) называется группа когомологий $H^i(\Gamma(X, C^{\cdot}(\mathcal{F})))$, где $C^{\cdot}(\mathcal{F})$ — резольвента Годемана и $\Gamma(X, C^{\cdot}(\mathcal{F}))$ — комплекс абелевых групп

$$0 \to \Gamma(X, C^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, C^1(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, C^2(\mathcal{F})) \to \dots$$

Если хотят подчеркнуть зависимость $H^i(X,\mathcal{F})$ от X, то ее называют i-той группой когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$.

Задача 7.7. Покажите, что $H^i(X,\mathcal{F})$ обладают всеми свойствами, перечисленными в начале разд. 4.

Указание. Воспользуйтесь задачами 7.6 и 7.2.

Для начала давайте удостоверимся, что все вялые пучки действительно ацикличны. Для этого воспользуемся таким простым результатом:

Задача 7.8. Пусть
$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$
— точная последовательность пучков, в которой пучки $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ вялые. Докажите, что и пучок $\mathcal{F}_3$ вял.

Теперь можно разобраться с когомологиями вялых пучков:

Задача 7.9. Докажите, что всякий вялый пучок ацикличен.

Указание. Разрежьте резольвенту Годемана вялого пучка на короткие точные последовательности, как в задаче 7.4. Далее воспользуйтесь задачами 7.2 и 7.8.

Вот первое следствие, имеющее отношение к реальной жизни:

Задача 7.10. Пусть $\mathcal{F}$ — такой пучок на пространстве X, что $\mathcal{F}_x \neq 0$ для одной-единственной точки $x \in X$ (иными словами, $\mathcal{F}$ — небоскреб). Докажите, что $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ при $i > 0$.

Наша следующая цель — доказать, что для когерентных пучков на алгебраических многообразиях общее определение когомологий согласуется с определением-времянкой из разд. 5.

Сначала дадим следующее определение. Пусть $f\colon Y \to X$ — непрерывное отображение и $\mathcal{F}$ — пучок на Y. Рассмотрим предпучок на X, определенный по правилу $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$; очевидно, что этот предпучок является пучком. Полученный пучок называется *прямым образом $\mathcal{F}$ относительно отображения f* и обозначается $f_*\mathcal{F}$.

Прямые образы играют важную роль в теории пучков, но нам они потребуются для весьма ограниченных целей. Именно, пусть $\mathcal{F}$ — пучок на X и $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$ — конечное открытое покрытие пространства X. С этим покрытием можно следующим образом связать резольвенту $\mathcal{F}$.

Для всякого набора индексов $1 \leqslant i_0 < \dots < i_r \leqslant N$ положим $U_{i_0,\dots,i_r} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r}$ и $\mathcal{F}_{i_0,\dots,i_r} = i_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0,\dots,i_r}})$, где $i\colon U_{i_0,\dots,i_r} \to X$ — вложение. Для всякого $r \in [0; N]$ положим $\mathcal{F}^r(\mathfrak{U}) = \oplus_{1 \leqslant i_0 < \dots < i_r \leqslant N} \mathcal{F}_{i_0,\dots,i_r}$. Определим гомоморфизмы $d^r\colon \mathcal{F}^r(\mathfrak{U}) \to \mathcal{F}^{r+1}(\mathfrak{U})$ следующим образом. Всякое сечение s пучка $\mathcal{F}^r(\mathfrak{U})$ над открытым множеством $V \subset X$ есть, по определению, набор сечений $s_{i_0,\dots,i_r} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_r} \cap V)$. Положим теперь
$$d^r(s)_{i_0,\dots,i_{r+1}} = \sum_{\alpha=0}^{r+1} (-1)^\alpha s_{i_0,\dots,\widehat{i_\alpha},\dots,i_{r+1}}|_{U_{i_0,\dots,i_{r+1}} \cap V}.$$
(шляпка над индексом означает, что этот индекс должен быть опущен).

Задача 7.11. Покажите, что последовательность пучков и гомоморфизмов
$$0 \to \mathcal{F}^0(\mathfrak{U}) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}^1(\mathfrak{U}) \xrightarrow{d_1} \dots$$
является резольвентой пучка $\mathcal{F}$.

Указание. Покажите, что для каждой точки $x \in X$ комплекс $0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^0(\mathfrak{U})_x \to \mathcal{F}^1(\mathfrak{U})_x \to \dots$ будет стягиваем; для этого, в свою очередь, зафиксируйте какое-нибудь i такое, что $U_i \ni x$, и действуйте по образцу задачи 5.5.

Задача 7.12. Докажите, что комплекс векторных пространств $\Gamma(X, \mathcal{F}^{\cdot}(\mathfrak{U}))$ изоморфен комплексу Чеха $C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Итак, ввиду задачи 7.4, чтобы доказать совпадение когомологий когерентных пучков на квазипроективных алгебраических многообразиях, вычисленных по Чеху и с помощью резольвент Годемана, достаточно доказать, что $H^m(X, i_*\mathcal{F}) = 0$ при $m > 0$, где $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение аффинного открытого подмножества U в X и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на U. Ключевой момент здесь — доказать, что

$H^m(X, \mathcal{F}) = 0$ при $m > 0$, где $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на аффинном многообразии X

(«теорема A» в новом обличье!); остальное получается несложными формальными редукциями. Давайте на теореме A для начала и сосредоточимся. Изложим план ее доказательства.

Зафиксируем аффинное многообразие X и обозначим $A = k[X]$. Среди всех A-модулей можно выделить класс так называемых инъективных модулей (определение см. ниже), обладающих следующими свойствами:

1) Всякий A-модуль является подмодулем некоторого инъективного модуля.

2) Если I — инъективный A-модуль, то квазикогерентный пучок $\tilde{I}$ вял.

Из этих двух утверждений обращение в нуль старших когомологий (квази)когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X немедленно следует. В самом деле, пусть $\mathcal{F} = \tilde{M}$, где M — A-модуль. Вложим M в инъективный модуль I^0, затем вложим $I^0/M = Z^1$ в инъективный модуль I^1, затем вложим I^1/Z^1 в инъективный модуль I^2, и т. д. В итоге получится комплекс инъективных модулей $0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$, являющийся резольвентой модуля M. Соответствующий комплекс квазикогерентных пучков $0 \to \tilde{I}^0 \to \tilde{I}^1 \to \tilde{I}^2 \to \dots$ является вялой резольвентой пучка $\mathcal{F}$; следовательно, $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\Gamma(\tilde{I}^{\cdot})) = H^i(I^{\cdot})$, что по построению равно нулю при $i > 0$.

Инъективные модули и инъективные оболочки

Приступим к выполнению намеченного плана доказательства теоремы A. Начнем со стандартного материала: определение инъективных модулей и вложение произвольного модуля в инъективный (кстати, инъективные модули нужны не только для доказательства теоремы А; они важны и во многих других вопросах).

Пусть A — кольцо (будем считать, что коммутативное и с единицей, хотя вся теория из этого раздела распространяется и на некоммутативные кольца), и пусть I — модуль над A. Говорят, что модуль I *инъективен,* если для всякой тройки (M, N, f), где N является A-модулем, $M \subset N$ является его подмодулем, и $f\colon M \to I$ — гомоморфизм, существует продолжение f на модуль N (сплошными стрелками обозначены гомоморфизмы, данные по условию, пунктирными — гомоморфизмы, существование которых утверждается):

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed] \\ I \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

По-другому это определение можно сформулировать так: если N — любой модуль над A и $M \subset N$ — любой его подмодуль, то естественный гомоморфизм $\operatorname{Hom}_A(N, I) \to \operatorname{Hom}_A(M, I)$ сюръективен.

Начнем с простых формальных свойств инъективных модулей.

Задача 7.13. Пусть инъективный модуль I является подмодулем модуля M. Докажите, что I выделяется в M прямым слагаемым.

Задача 7.14. Пусть модуль I является прямой суммой своих подмодулей I_1 и I_2. Докажите, что I инъективен тогда и только тогда, когда I_1 и I_2 инъективны.

Из этой задачи следует, что прямая сумма *конечного* числа инъективных модулей также инъективна. Для бесконечного семейства инъективных модулей это в общем случае неверно.

Задача 7.15. Докажите, что прямое произведение любого (в том числе бесконечного!) семейства инъективных модулей также инъективно.

Теперь перейдем к более содержательным вещам.

Задача 7.16. Пусть $A = \mathbb{Z}$, так что A-модуль — то же самое, что абелева группа. Докажите, что всякая инъективная абелева группа I делима (то есть уравнение $nx = a$ разрешимо в I для всех $a \in I$ и $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

Указание. Положите $N = \mathbb{Z}$, $M = n\mathbb{Z}$ в определении инъективного модуля.

Обратно, всякая делимая абелева группа инъективна, как это вытекает из следующих двух задач:

Задача 7.17. Пусть M — абелева группа, $N \subset M$ — подгруппа, и $f\colon N \to I$ — гомоморфизм в делимую абелеву группу I. Докажите, что для всякого $z \in M \setminus N$ можно продолжить гомоморфизм f на подгруппу в M, порожденную N и z

Задача 7.18. Покажите, что всякая делимая абелева группа инъективна.

Указание. Содержательная часть этого утверждения доказана в предыдущей задаче. Остается формально завершить рассуждение с помощью леммы Цорна или какого-нибудь ее эквивалента.

Результат предыдущей задачи обобщается с $\mathbb{Z}$ на произвольное кольцо следующим образом:

Задача 7.19. Докажите, что A-модуль I инъективен тогда и только тогда, когда для всякого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ и гомоморфизма $f\colon \mathfrak{a} \to I$ существует такой элемент $m \in I$, что $f(a) = am$ для всех $a \in \mathfrak{a}$.

Указание. Условие на гомоморфизм f равносильно тому, что он продолжается до гомоморфизма $A \to I$. Далее имитируйте решение задач 7.17 и 7.18.

Приведем красивый пример инъективного модуля. Пусть k — поле характеристики нуль, $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ (кольцо многочленов). Рассмотрим A-модуль I, определенный следующим образом. Как абелева группа I — это то же самое кольцо A, но действие A на I определяется так: если $f \in A$ и $m \in I$, то $f \cdot m = f(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n) \cdot m$ (иными словами, f действует на m как дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами). Модуль I называется модулем *обратных функций Маколея.* Покажем, что модуль M инъективен над A.

Для начала заметим, что в данном случае нам достаточно проверить условие инъективности (7.1) лишь в случае, когда модули M и N конечно порождены: в самом деле, в виду задачи 7.19 и указания к ней, можно даже ограничиться случаем $N = A$, $M = \mathfrak{a}$ (идеал в A), а поскольку кольцо A нетерово, $\mathfrak{a}$ является конечно порожденным A-модулем. Обозначим теперь $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n) \subset A$. Этот максимальный идеал сыграет основную роль в наших рассуждениях. Покажем, что при проверке условия инъективности можно ограничиться случаем, когда (конечно порожденные) M и N аннулируются некоторой степенью $\mathfrak{m}$. Это делается так. Во-первых:

Задача 7.20. Пусть M — конечно порожденный A-модуль и $f\colon M \to I$ — гомоморфизм. Покажите, что $f(\mathfrak{m}^r M) = 0$ для некоторого $r > 0$.

Указание. Степени многочленов, являющихся образами конечной системы образующих модуля M, ограничены в совокупности.

Во-вторых:

Задача 7.21. Пусть $M \subset N$ — конечно порожденные A-модули. Покажите, что для всякого $r > 0$ существует такое $s > 0$, что $\mathfrak{m}^s N \cap M \subset \mathfrak{m}^r M$.

Решение. Доказательство, данное на лекции (и в первой версии записок), было некорректно. Приводимое ниже рассуждение взято из книги [1]. Результат этой задачи — частный случай «леммы Артина-Риса» (см. [1, предложение 10.9]).

Рассмотрим градуированное кольцо $\hat{A} = A \oplus \mathfrak{m} \oplus \oplus m^2 \oplus \dots$ и градуированный $\hat{A}$-модуль $\hat{N} = N \oplus \mathfrak{m}N \oplus \mathfrak{m}^2 N \oplus \dots$, на котором $\hat{A}$ действует следующим образом: если $F \in (\hat{A})_d = \mathfrak{m}^d$ — однородный многочлен степени d и $y \in (\hat{N})_r = \mathfrak{m}^r N$, то $fy \in \mathfrak{m}^{r+d} N$ рассматривается как элемент $(\hat{N})_{r+d}$. Так как кольцо A нетерово и N — конечно порожденный A-модуль, то $\hat{A}$ — нетерово кольцо и $\hat{N}$ конечно порожден над $\hat{A}$. Следовательно, градуированный подмодуль $\bigoplus_{i \geqslant 0} (\mathfrak{m}^i N \cap M) \subset \hat{N}$ также конечно порожден. Выберем в нем конечную систему однородных образующих. Тогда можно взять $s > r + \delta$, где δ — максимальная степень образующих. $\square$

Пусть теперь $M \subset N$ — конечно порожденные A-модули и $F\colon M \to I$ — гомоморфизм. Выберем r как в задаче 7.20, а затем, по этому r, выберем s как в задаче 7.21. Тогда имеем вложение $M/(\mathfrak{m}^s N \cap M) \hookrightarrow N/\mathfrak{m}^s N$, гомоморфизм f пропускается через $M/(\mathfrak{m}^s N \cap M)$, и оба модуля $M/(\mathfrak{m}^s N \cap M)$ и $N/\mathfrak{m}^s N$ аннулируются $\mathfrak{m}^s$; ясно, что задачи продолжения f с M на N и с $M/(\mathfrak{m}^s N \cap M)$ на $N/\mathfrak{m}^s N$ равносильны. Поэтому будем далее считать, что M и N аннулируются какой-то степенью $\mathfrak{m}$. Достаточно, как водится, показать, что можно продолжить f на $M + Az$, где $z \in N \setminus M$. Пусть $\mathfrak{a} = \{\, a \in A \mid az \in M \,\}$. Как и в задаче 7.19, все сводится к продолжению гомоморфизма $\mathfrak{a} \to I$ до гомоморфизма $A \to I$.

Задача 7.22. Покажите, что $\mathfrak{m}^s \subseteq \mathfrak{a} \subset A$ для некоторого целого s, и выведите отсюда, что существует конечная фильтрация

$$A = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}$$

такая, что $\mathfrak{a}_j/\mathfrak{a}_{j+1}$ изоморфны $k = A/\mathfrak{m}$ как A-модули для всех j.

Стало быть, все свелось к продолжению гомоморфизма с M до N, где $N/M \cong A/\mathfrak{m}$.

Задача 7.23. Покажите, что возможность такого продолжения равносильна возможности продолжения гомоморфизма $f\colon \mathfrak{m} \to I$ до гомоморфизма $A \to I$.

Указание. Действуйте как в задаче 7.19; лемма Цорна не понадобится.

Что же такое гомоморфизм из $\mathfrak{m}$ в I? У A-модуля M есть образующие $x_1, \ldots, x_n$. Между ними есть очевидные соотношения: $x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$. Более того, все прочие отношения являются их следствием, так как комплекс Кошуля $K^A_{\cdot}(x_1, \ldots, x_n)$ ацикличен в ненулевых степенях. Стало быть, гомоморфизм $\varphi\colon M \to I$ — это набор многочленов $f_1, \ldots, f_n$ (где $f_i = \varphi(x_i)$), удовлетворяющий соотношениям $\partial f_i/\partial x_j = \partial f_j/\partial x_i$ для всех i и j, а его продолжение на A — это такой многочлен g, что $\partial g/\partial x_i = f_i$ для всех i. Стало быть, задача продолжения свелась к такой: дана полиномиальная дифференциальная форма $\omega = \sum f_i dx_i$, причем $d\omega = 0$; верно ли, что $\omega = dg$ для некоторого многочлена g? Согласно лемме Пуанкаре, ответ утвердителен, и инъективность модуля I доказана.

Задача 7.24. Покажите, что лемма Пуанкаре верна для полиномиальных дифференциальных форм над полем характеристики нуль.

Указание. Имитируйте доказательство, в котором проводится интегрирование по радиусам; кстати, верна ли лемма Пуанкаре в характеристике p?

Вернемся к общей теории: покажем, что всякий модуль можно вложить в инъективный.

Задача 7.25. Пусть x — ненулевой элемент абелевой группы A. Покажите, что существует гомоморфизм $f\colon A \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, для которого $f(x) \neq 0$.

Пусть A — коммутативное кольцо и G — абелева группа. Рассмотрим абелеву группу $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$, состоящую, по определению, из всевозможных гомоморфизмов A как абелевой группы в G. На группе $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ введем структуру A-модуля следующим образом: если $a \in A$ и $f\colon A \to G$, то $(af)\colon A \to G$ действует по формуле $b \mapsto f(ab)$.

Задача 7.26. Покажите, что для любого A-модуля M и любой абелевой группы G имеет место естественный изоморфизм $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G)$ (в левой части стоят гомоморфизмы A-модулей, в правой — абелевых групп).

Задача 7.27. Пусть абелева группа G делима. Покажите, что A-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ инъективен.

Указание. В свете предыдущей задачи это вытекает из того, что группа G инъективна как $\mathbb{Z}$-модуль.

Задача 7.28. Пусть M — модуль над кольцом A и $x \in M$ — ненулевой элемент. Докажите, что существует гомоморфизм A-модулей $f\colon M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, для которого $f(x) \neq 0$.

Задача 7.29. Докажите, что всякий A-модуль является подмодулем некоторого инъективного модуля.

Указание. Пользуясь задачей 7.28, вложите A-модуль M в произведение A-модулей $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ в количестве, равном количеству ненулевых элементов M.

Предыдущая задача обеспечивает вложение произвольного модуля в инъективный, но этот инъективный модуль несуразно велик. На самом деле для всякого A-модуля M существует и однозначно определен наименьший содержащий его инъективный модуль (он называется *инъективной оболочкой* A-модуля M), и такие модули уже более обозримы. Следующая серия задач посвящена построению инъективных оболочек.

Начнем со следующего определения. Пусть M — A-модуль, $N \subset M$ — подмодуль. Говорят, что M является *существенным расширением* модуля N, если для всякого ненулевого $x \in M$ существует такое $a \in A$, что $ax \in N$ и $ax \neq 0$.

Задача 7.30. Приведите пример несущественного расширения.

Задача 7.31. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, "g"] \\ P & \end{tikzcd}$$

вложение i является существенным расширением, а гомоморфизм f инъективен. Докажите, что и гомоморфизм g инъективен.

Задача 7.32. Пусть M — подмодуль модуля I, и пусть подмодуль $E \subseteq I$, содержащий M, является его существенным расширением и максимален среди подмодулей I с этими свойствами (проверьте, что таковой всегда существует!). Докажите, что E выделяется прямым слагаемым в I.

Задача 7.33. Докажите, что у всякого модуля есть существенное расширение, являющееся инъективным модулем.

Существенное расширение модуля M, являющееся инъективным модулем, называется *инъективной оболочкой* модуля M.

Задача 7.34. Докажите следующие свойства инъективных оболочек:

1) Пусть $M \overset{i}{\hookrightarrow} E$ — инъективная оболочка модуля M и пусть $M \overset{j}{\hookrightarrow} N$ — существенное расширение. Докажите, что существует инъективный гомоморфизм $f\colon N \to E$ такой, что $f \circ j = i$ (иными словами, инъективная оболочка модуля M является его максимальным существенным расширением).

2) Пусть $M \overset{i}{\hookrightarrow} E$ — инъективная оболочка модуля M и пусть $M \overset{j}{\hookrightarrow} I$ — вложение в инъективный модуль. Докажите, что существует инъективный гомоморфизм $f\colon E \to I$ такой, что $f \circ i = j$ (иными словами, инъективная оболочка модуля M является наименьшим содержащим его инъективным модулем).

3) Если $M \overset{i_1}{\hookrightarrow} E_1$ и $M \overset{i_2}{\hookrightarrow} E_2$ — две инъективные оболочки модуля M, то существует изоморфизм $f\colon E_1 \to E_2$ такой, что $f \circ i_1 = i_2$ (иными словами, инъективная оболочка единственна).

Инъективная оболочка A-модуля M обозначается $E_A(M)$. Предупреждение: инъективная оболочка единственна с точностью до изоморфизма, но этот изоморфизм отнюдь не единствен, так что сопоставление модулю его инъективной оболочки не является функтором.

8. Структура инъективных модулей и теорема сравнения

Инъективные модули над нетеровыми кольцами

В предыдущем разделе речь шла об общих свойствах инъективных модулей. Теперь нам потребуются свойства инъективных модулей над *нетеровыми* кольцами.

Задача 8.1. Докажите, что любая (в том числе и бесконечная) прямая сумма инъективных модулей над нетеровым кольцом также будет инъективным модулем.

Указание. Для конечных прямых сумм (над любыми кольцами) утверждение очевидно. Далее, согласно задаче 7.19, из нетеровости кольца вытекает, что достаточно решить задачу о продолжении гомоморфизма идеала $\mathfrak{a} \subset A$ до гомоморфизма кольца A. Поскольку идеал конечно порожден, гомоморфизм из него пропускается через гомоморфизм в *конечную* прямую сумму.

Кстати, верно и обратное утверждение: кольцо нетерово тогда и только тогда, когда любая прямая сумма инъективных модулей инъективна. Доказательство см. в [2, с. 27, упр. 21].

Задача 8.2. Пусть I — инъективный модуль над нетеровым кольцом A. Докажите, что I содержит прямое слагаемое, изоморфное $E_A(A/\mathfrak{p})$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$.

Указание. Модуль I имеет хотя бы один ассоциированный простой идеал (см. задачу 6.9).