2) Пусть $M \overset{i}{\hookrightarrow} E$ — инъективная оболочка модуля M и пусть $M \overset{j}{\hookrightarrow} I$ — вложение в инъективный модуль. Докажите, что существует инъективный гомоморфизм $f\colon E \to I$ такой, что $f \circ i = j$ (иными словами, инъективная оболочка модуля M является наименьшим содержащим его инъективным модулем).

3) Если $M \overset{i_1}{\hookrightarrow} E_1$ и $M \overset{i_2}{\hookrightarrow} E_2$ — две инъективные оболочки модуля M, то существует изоморфизм $f\colon E_1 \to E_2$ такой, что $f \circ i_1 = i_2$ (иными словами, инъективная оболочка единственна).

Инъективная оболочка A-модуля M обозначается $E_A(M)$. Предупреждение: инъективная оболочка единственна с точностью до изоморфизма, но этот изоморфизм отнюдь не единствен, так что сопоставление модулю его инъективной оболочки не является функтором.

8. Структура инъективных модулей и теорема сравнения

Инъективные модули над нетеровыми кольцами

В предыдущем разделе речь шла об общих свойствах инъективных модулей. Теперь нам потребуются свойства инъективных модулей над *нетеровыми* кольцами.

Задача 8.1. Докажите, что любая (в том числе и бесконечная) прямая сумма инъективных модулей над нетеровым кольцом также будет инъективным модулем.

Указание. Для конечных прямых сумм (над любыми кольцами) утверждение очевидно. Далее, согласно задаче 7.19, из нетеровости кольца вытекает, что достаточно решить задачу о продолжении гомоморфизма идеала $\mathfrak{a} \subset A$ до гомоморфизма кольца A. Поскольку идеал конечно порожден, гомоморфизм из него пропускается через гомоморфизм в *конечную* прямую сумму.

Кстати, верно и обратное утверждение: кольцо нетерово тогда и только тогда, когда любая прямая сумма инъективных модулей инъективна. Доказательство см. в [2, с. 27, упр. 21].

Задача 8.2. Пусть I — инъективный модуль над нетеровым кольцом A. Докажите, что I содержит прямое слагаемое, изоморфное $E_A(A/\mathfrak{p})$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$.

Указание. Модуль I имеет хотя бы один ассоциированный простой идеал (см. задачу 6.9).

Задача 8.3. Докажите, что всякий инъективный модуль над нетеровым кольцом A является прямой суммой модулей вида $E_A(A/\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал.

Указание. Рассмотрим частично упорядоченное множество, элементы которого — подмодули нашего модуля I, являющиеся прямой суммой модулей вида $E_A(A/\mathfrak{p}_\alpha)$ для различных простых $\mathfrak{p}_\alpha \subset A$, с фиксированным разложением в эту прямую сумму, и применим к нему лемму Цорна; при проверке того, что множество удовлетворяет «условию индуктивности», придется пользоваться результатом задачи 8.1, а при проверке того, что максимальный элемент — это весь модуль I, потребуется результат задачи 8.2.

Изучим повнимательнее модули $E_A(A/\mathfrak{p})$ — строительные блоки, из которых складываются инъективные модули над нетеровыми кольцами.

Задача 8.4. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал нетерова кольца A. Покажите, что модуль $E_A(A/\mathfrak{p})$ не содержит подмодулей, изоморфных $A/\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q} \subset A$ — простой идеал, отличный от $\mathfrak{p}$ (иными словами: $\mathrm{Ass}(E_A(A/\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$).

Указание. Если $A/\mathfrak{q} \subset E_A(A/\mathfrak{p})$ и $x \in A/\mathfrak{q}$, то некоторое ненулевое y, являющееся кратным x, лежит в $A/\mathfrak{p}$. Найдите двумя способами $\mathrm{Ann}(y)$.

Задача 8.5. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал нетерова кольца A. Покажите, что для всякого $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ умножение на f является автоморфизмом модуля $E_A(A/\mathfrak{p})$.

Указание. Мономорфность выводи́те из того, что $E_A(A/\mathfrak{p})$ — существенное расширение $A/\mathfrak{p}$, а эпиморфность — из того, что модуль $fE_A(A/\mathfrak{p}) \cong E_A(A/\mathfrak{p})$ также инъективен, и пункта (2) задачи 7.34.

Чтобы двигаться дальше, нам придется разобраться поподробнее с ассоциированными простыми идеалами. (Стоит иметь в виду, что информация о структуре множеств $\mathrm{Ass}(M)$, которую мы получим, нужна в алгебраической геометрии и коммутативной алгебре не только для сравнения двух определений когомологий.)

Снова ассоциированные простые идеалы

Вся нижеизложенная теория может быть при правильной формулировке развита для модулей над любым нетеровым кольцом A; мы, однако же, будем предполагать, что $A = k[X]$, где X — аффинное многообразие. Зафиксируем эти обозначения до конца раздела.

Сначала перескажем то, что мы уже знаем из разд. 6 про ассоциированные простые идеалы, на геометрическом языке (пользуясь «соответствием Серра» между конечно порожденными A-модулями и когерентными пучками на X — см. задачи 4.17 и 4.22).

Напомним, что всякое неприводимое замкнутое подмножество $Y \subset X$ имеет вид $V(\mathfrak{p})$ для некоторого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ и что соответствие $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами простых идеалов кольца A и неприводимых замкнутых подмножеств X. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Будем говорить, что неприводимое замкнутое подмногообразие $Y \subset X$ *ассоциировано* с пучком $\mathcal{F}$, если существует вложение $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{F}$ (пучок $\mathcal{O}_Y$ обычным образом рассматривается как $\mathcal{O}_X$-модуль)[9]. Если $Y = V(\mathfrak{p})$ (идеал $\mathfrak{p}$ прост) и $\mathcal{F} = \tilde{M}$, то Y ассоциировано с $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}$ ассоциирован с M. Множество подмногообразий, ассоциированных с $\mathcal{F}$, обозначается $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$. Мы знаем из разд. 6, что для ненулевого пучка $\mathcal{F}$ множество $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ конечно и непусто. Кроме того, если $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, где $Y \subset X$ — неприводимое замкнутое подмножество, то $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) = \{Y\}$ (задача 6.10).

Введем теперь следующее определение. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный пучок на произвольном топологическом пространстве X. Тогда его *носителем* (обозначается $\mathrm{supp}(\mathcal{F})$) называется множество таких точек $x \in X$, что $\mathcal{F}_x \neq 0$. В такой общности ничего интересного про носитель пучка сказать, пожалуй, нельзя. Вернемся, однако, к случаю, когда X — аффинное алгебраическое многообразие:

Задача 8.6. Пусть $Y \subset X$ — замкнутое неприводимое подмножество. Чему равен $\mathrm{supp}(\mathcal{O}_Y)$?

Задача 8.7. Пусть когерентный пучок $\mathcal{F}$ имеет вид $\tilde{M}$, где M — конечно порожденный A-модуль. Покажите, что $\mathrm{supp}(\mathcal{F}) = V(\mathrm{Ann}(M)) \subset X$ (идеал $\mathrm{Ann}(M)$ — это *аннулятор* модуля M, то есть множество таких элементов $f \in A$, что $fM = 0$).

Решение. Чтобы доказать включение $\mathrm{supp}(\mathcal{F}) \subseteq V(\mathrm{Ann}(M))$, надо проверить следующее: если $x \notin V(\mathrm{Ann}(M))$ (то есть существует такая функция f, что $fM = 0$, но $f(x) \neq 0$), то $M_x = 0$. Сделайте это самостоятельно (конечная порожденность модуля M не потребуется). Пусть, напротив, $M_x = 0$, и пусть $m_1, \ldots, m_r$ — система образующих модуля M. Тогда $m_i/1 = 0$ в M_x для всех i, так что существуют такие функции $f_1, \ldots, f_r \in A$, что $f_i(x) \neq 0$ и $f_i m_i = 0$. Положим $f = f_1 f_2 \ldots f_r$. Тогда $f(x) \neq 0$ и $f \in \mathrm{Ann}(M)$, то есть $x \notin V(\mathrm{Ann}(M))$. Все доказано. $\square$

[9] Наша терминология носит «учебный» характер: обычно элементами множества $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ считают не сами подмногообразия в X, а их «общие точки» (в схемном смысле), и соответственно называют $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ множеством *ассоциированных точек* пучка $\mathcal{F}$.

В частности, мы доказали, что носитель когерентного пучка на аффинном многообразии — замкнутое подмножество. Впрочем, не только на аффинном:

Задача 8.8. Докажите, что носитель когерентного пучка на произвольном алгебраическом многообразии является замкнутым подмножеством.

Если $s \in \mathcal{F}(X)$, где $\mathcal{F}$ — пучок на топологическом пространстве X, то *носителем* сечения s называют множество $\operatorname{supp} s = \{ x \in X \mid s_x \neq 0 \}$ (то есть множество тех точек, в которых росток сечения s отличен от нуля).

Задача 8.9. Докажите, что носитель сечения (квази)когерентного пучка $\mathcal{F}$ на алгебраическом многообразии X является замкнутым множеством.

Указание. Пусть s — сечение, о котором идет речь, и $\mathcal{G}$ — подпучок пучка $\mathcal{F}$, порожденный сечением s. Покажите, что $\operatorname{supp} s = \operatorname{supp}(\mathcal{G})$.

Теперь можно непосредственно заняться $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ (по-прежнему X — аффинное многообразие и $A = k[X]$).

Задача 8.10. Пусть $Y \subset X$ — подмногообразие, ассоциированное с когерентным пучком $\mathcal{F}$. Докажите, что Y содержится в одной из неприводимых компонент $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$.

Указание. Если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, то $\operatorname{supp}(\mathcal{G}) \subset \operatorname{supp}(\mathcal{F})$.

Следующая задача показывает, что ассоциированные многообразия хорошо себя ведут при ограничении на открытые подмножества.

Задача 8.11. Пусть $f \in A$, $U = D(f) \subset X$ (напомним, что U — также аффинное многообразие), и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Пусть $\operatorname{Ass}(\mathcal{F}) = \{Y_1, \ldots, Y_r\}$. Докажите, что

$$\operatorname{Ass}(\mathcal{F}|_U) = \{ Y_j \cap U \mid Y_j \cap U \neq \varnothing \}.$$

Решение. Пусть $Y \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$. Тогда $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{F}$, откуда $\mathcal{O}_Y|_U \hookrightarrow \mathcal{F}|_U$; если $Y \cap U \neq \varnothing$, то $\mathcal{O}_Y|_U = \mathcal{O}_{Y\cap U}$; этим доказано включение «$\subseteq$». Докажем обратное включение. Пусть $\mathcal{F} = \tilde{M}$, где M — модуль над A (значит, $M = \mathcal{F}(X)$), тогда $\mathcal{F}|_U = \widetilde{M_f}$, и путь $Y \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F}|_U)$ является множеством нулей простого идеала $\operatorname{Ann}(m/f^r) \subset A_f$ (подразумевается, что $m \in M$). Нам достаточно показать, что $\bar{Y} \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$. Поскольку умножение на f является автоморфизмом модуля M_f, имеем $\operatorname{Ann}_{A_f}(m/f^r) = \operatorname{Ann}_{A_f}(m)$. Пусть $s \in \mathcal{F}(X)$ соответствует элементу $m \in M$, тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann}_A(m) = \{ f \in A \mid f \cdot s = 0 \} = \{ f \in A \mid (f \cdot s)|_U = 0 \} = \\ \{ f \in A \mid f = 0 \text{ на } Y \} = \{ f \in A \mid f = 0 \text{ на } \bar{Y} \}.\end{aligned}$$

Все доказано. $\square$

Результат этой задачи показывает, что ассоциированные подмногообразия можно корректно определить для когерентного пучка $\mathcal{F}$ на любом алгебраическом многообразии X: надо покрыть X аффинными открытыми подмножествами, взять ассоциированные подмногообразия в каждом из подмножеств, а затем взять объединения. Задача 8.11 показывает, что на пересечениях все будет «состыковано».

Теперь можно доказать, что все неприводимые компоненты носителя ассоциированы с пучком.

Задача 8.12. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на аффинной схеме X. Тогда все неприводимые компоненты $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$ лежат в $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$.

Указание. Рассуждая от противного, пусть Y — компонента носителя $\mathcal{F}$, не ассоциированная с $\mathcal{F}$. Выведите из результата задачи 8.10, что тогда существует открытое подмножество $D(f) \subset X$, не пересекающееся ни с одним элементом из $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ и такое, что $D(f) \cap Y \neq \varnothing$. Получите из задачи 8.11, что $\operatorname{Ass}(\mathcal{F}|_{D(f)}) = \varnothing$; поскольку при этом $\operatorname{supp}(\mathcal{F}|_{D(f)}) \neq \varnothing$, получите противоречие с задачей 6.9.

Ассоциированные подмногообразия, являющиеся компонентами носителя, называются *изолированными* ассоциированными подмногообразиями (более традиционное словоупотребление: изолированные, или минимальные ассоциированные идеалы — в коммутативной алгебре, и изолированные ассоциированные точки — в алгебраической геометрии). Прочие ассоциированные подмногообразия (согласно задачам 8.12 и 8.10, они вложены в изолированные) так и называются *вложенными* (в коммутативной алгебре соответствующие ассоциированные идеалы также называют вложенными).

Приведем пример. Пусть $X = \mathbb{A}^3$, $\mathcal{F} = \widetilde{A/I}$, где

$$I = (x(x^2+y^2+z^2), y(x^2+y^2+z^2), z(x^2+y^2+z^2)) \subset A.$$

Очевидно, $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$ совпадает с множеством нулей идеала I, то есть с конусом $Q \subset \mathbb{A}^3$, заданном уравнением $x^2+y^2+z^2=0$. Ввиду задачи 8.12, $Q \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$. Однако $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ этим не исчерпывается. В самом деле, аннулятор элемента $(x^2+y^2+z^2) \bmod I \in A/I$ совпадает с (x,y,z), так что начало координат также является ассоциированным подмногообразием пучка $\mathcal{F}$ (вложенным в Q).

Задача 8.13. Покажите, что никаких других ассоциированных подмногообразий у пучка $\mathcal{F}$ нет.

Указание. См. задачу 6.12.

Наш экскурс в коммутативную алгебру подходит к концу; осталось доказать то утверждение, ради которого мы его предприняли:

Задача 8.14. Пусть M — модуль (не обязательно конечно порожденный) над A, и пусть $\mathrm{Ass}(M)$ состоит из единственного простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$. Покажите, что для всякого $x \in M$ существует такое $r > 0$, что $\mathfrak{p}^r x = 0$.

Указание. Перейдя к подмодулю, порожденному x, можно считать, что M конечно порожден. Из задачи 8.12 вытекает, что $\mathrm{supp}(\tilde{M}) = V(\mathfrak{p})$; теперь из задачи 8.7 и теоремы Гильберта о нулях вытекает, что $\mathfrak{p}^r \subseteq \mathrm{Ann}(M)$ для некоторого $r > 0$, откуда все и следует.

В заключение повторим, что вся теория, изложенная в этом подпункте, обобщается на модули над произвольным нетеровым кольцом. Есть два способа познакомиться с этим обобщением. Первый способ — прочитать чисто алгебраическое изложение в книгах Ленга «Алгебра» (глава 6, § 4) или Бурбаки «Коммутативная алгебра» (глава 3). Второй способу — познакомиться с формализмом аффинных схем и когерентных пучков на них (это с избытком содержится в «Алгебраической геометрии» Хартсхорна; более сжатое изложение можно извлечь из упражнений к первой и третьей главам книги [1]), после чего пересказать то, что вы знаете про Ass, в контексте когерентных пучков на произвольных аффинных схемах; доказательства воспроизводятся почти дословно.

Завершение доказательства теоремы сравнения

Продолжим с того места, где мы остановились в задаче 8.5. По-прежнему X — аффинное многообразие, $A = k[X]$. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал.

Задача 8.15. Покажите, что для каждого элемента $x \in E(A/\mathfrak{p})$ существует такое $r > 0$, что $\mathfrak{p}^r x = 0$.

Указание. Сопоставьте задачи 8.14 и 8.4.

Положим $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = \widetilde{E(A/\mathfrak{p})}$.

Задача 8.16. Пусть $U = D(f) \subset X$, причем $U \cap V(\mathfrak{p}) = \varnothing$. Покажите, что $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(U) = 0$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.17. Пусть $U = D(f) \subset X$, причем $U \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$. Покажите, что $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(U) = E(A/\mathfrak{p})$. Пусть также $g \in A$, причем $D(fg) \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$. Покажите, что отображение ограничения $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(D(f)) \to \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}(D(fg))$ является тождественным.

Указание. Воспользуйтесь задачей 8.5.

Задача 8.18. Пусть $U \subset X$ — произвольное открытое подмножество. Покажите, что $\mathcal{F}_\mathfrak{p}(U) = E(A/\mathfrak{p})$, если $U \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$, и $\mathcal{F}_\mathfrak{p}(U) = 0$, если $U \cap V(\mathfrak{p}) = \varnothing$. Покажите также, что отображения ограничения $\mathcal{F}_\mathfrak{p}(U) \to \mathcal{F}_\mathfrak{p}(V)$ являются тождественными, если $V \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$.

Задача 8.19. Покажите, что пучок $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$ вял.

Из результата этой задачи следует, что $H^i(X, \mathcal{F}_\mathfrak{p}) = 0$ при $i > 0$. Поскольку любой A-модуль M является прямой суммой модулей вида $E(A/\mathfrak{p})$, возникает искушение доказать, что $H^i(X, \tilde{M}) = 0$ при $i > 0$, в одну строчку: раз M — прямая сумма модулей $E(A/\mathfrak{p})$, то $\tilde{M}$ — прямая сумма пучков $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$, а прямая сумма вялых пучков является вялой. Единственное «но» в том, что при правильном определении бесконечной прямой суммы прямая сумма вялых пучков на произвольном пространстве может вялой и не быть. Не развивая общую теории, мы докажем то, что нам непосредственно нужно.

Задача 8.20. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие. Покажите, что убывающие цепочки его замкнутых подмножеств стабилизируются.

Указание. Кольцо $k[X]$ нетерово.

Задача 8.21. Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие. Покажите, что всякое открытое подмножество $U \subset X$ является конечным объединением множеств вида $D(f) \subset X$ для различных $f \in A$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.22. Пусть $\{M_\alpha\}$ — семейство (вообще говоря, бесконечное) модулей над кольцом A, и $M = \bigoplus_\alpha M_\alpha$. Положим $\mathcal{F}_\alpha = \widetilde{M_\alpha}$ и $\mathcal{F} = \tilde{M}$. Покажите, что для всякого открытого подмножества $U \subset X$ имеет место равенство $\mathcal{F} = \bigoplus_\alpha \mathcal{F}_\alpha$.

Указание. Если $U = D(f)$, то это простое утверждение про модули частных. В общем случае множество U является, ввиду предыдущей задачи, конечным объединением множеств вида $D(f)$; проведите индукцию по их числу.

Задача 8.23. Пусть, в условиях предыдущей задачи, все пучки $\mathcal{F}_\alpha = \widetilde{M_\alpha}$ являются вялыми. Покажите, что и пучок $\mathcal{F} = \tilde{M}$ будет вялым.

Задача 8.24. Пусть I — инъективный модуль над A. Покажите, что пучок $\tilde{I}$ является вялым.

Следующая задача показывает, что наша осторожность в работе с бесконечными прямыми суммами пучков не была излишней:

Задача 8.25. Пусть $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ — бесконечное семейство пучков на топологическом пространстве X. Определим предпучок $\mathcal{F}$ по правилу $U \mapsto \bigoplus_\alpha \mathcal{F}_\alpha$. Покажите на примере, что предпучок $\mathcal{F}$ может не быть пучком.

Сопоставляя результаты задач 8.24 и 7.29 с планом, изложенным на с. 72, мы можем, наконец, сказать, что теорема A (для общего определения когомологий) доказана.

Теперь мы можем доказать «теорему сравнения» (то есть совпадение $H^i(X, \mathcal{F})$ и $\check{H}^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на квазипроективном многообразии X и $\mathfrak{U}$ — его конечное аффинное покрытие). Начнем с леммы:

Задача 8.26. Пусть U — аффинное открытое подмножество квазипроективного многообразия X, и пусть $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение. Покажите, что для всякой точной последовательности

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

квазикогерентных пучков на U последовательность

$$0 \to j_*\mathcal{F}_1 \to j_*\mathcal{F}_2 \to j_*\mathcal{F}_3 \to 0$$

также точна.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 4.25 и тем, что на X пересечение двух аффинных открытых подмножеств также аффинно.

Без дополнительных предположений утверждение этой задачи неверно: функтор «прямой образ» (в том числе и прямой образ при открытом вложении) отнюдь не является точным справа.

Для доказательства теоремы сравнения достаточно, ввиду того, что говорилось в предыдущем разделе, установить такой факт:

> Пусть $U \subset X$ — аффинное открытое подмножество и $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на U. Тогда $H^j(X, i_*\mathcal{F}) = 0$ при $j > 0$, где $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение.

Доказывается это следующим образом. Положим $A = k[U]$, и пусть $\mathcal{F} = \tilde{M}$, где M — модуль над A. Пусть

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots \tag{8.1}$$

— инъективная резольвента модуля M (точнее говоря, инъективная резольвента, к которой добавлен сам модуль M).

Задача 8.27. Покажите, что последовательность пучков

$$0 \to i_*\tilde{M} \to i_*\widetilde{I^0} \to i_*\widetilde{I^1} \to i_*\widetilde{I^2} \to \dots \tag{8.2}$$

точна.

Указание. Последовательность пучков на U, соответствующая точной последовательности (8.1), разбивается на короткие точные последовательности вида

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0,$$

где все $\mathcal{F}_i$ квазикогерентны.

Задача 8.28. Покажите, что последовательность групп глобальных сечений, соответствующая точной последовательности (8.2), также точна.

Указание. $(i_*\widetilde{I^r})(X) = I^r$.

Наконец, заметим, что последовательность (8.2) с выброшенным $i_*\tilde{M}$ является вялой резольвентой пучка $i_*\tilde{M}$. В самом деле, все $\widetilde{I^r}$ будут вялыми пучками на U ввиду задачи 8.24, а их прямые образы будут вялыми ввиду следующего простого факта:

Задача 8.29. Пусть $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение открытого подмножества в топологическое пространство X и $\mathcal{F}$ — вялый пучок на U. Покажите, что пучок $i_*\mathcal{F}$ вял на X.

Сопоставляя результаты задач 8.27, 8.28 и 8.29, получаем, что $H^j(X, i_*(\tilde{M})) = 0$ при $i > 0$, что и требовалось.

9. Универсальное свойство когомологий

Определение когомологий пучков с помощью вялых резольвент оставляет ощущение неудовлетворенности: неясно, почему мы воспользовались именно вялыми пучками, и не получится ли других когомологий, если строить их с помощью резольвент из пучков другого типа. Сейчас мы покажем, что определенные нами когомологии обладают универсальным свойством (теорема 9.4); эту теорему можно рассматривать как еще одно (эквивалентное) определение когомологий, не привязанное к каком-то определенному типу резольвент. Это определение более естественно, чем данное нами в разд. 7, и, кроме того, ведет к важным обобщениям.

Условимся, что все комплексы, о которых пойдет речь далее, будут ограниченными снизу. Все пучки будут рассматриваться на фиксированном топологическом пространстве X.

Для начала чуть-чуть обобщим понятие резольвенты.

Определение 9.1. *Резольвентой* пучка $\mathcal{F}$ называется (ограниченный снизу) комплекс $\mathcal{K}^{\cdot}$ вместе с квазиизоморфизмом $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{K}^{\cdot}$ (в левой части пучок $\mathcal{F}$ рассматривается как комплекс, единственным ненулевым элементом которого является $\mathcal{F}$ в степени 0).