Указание. Последовательность пучков на U, соответствующая точной последовательности (8.1), разбивается на короткие точные последовательности вида

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0,$$

где все $\mathcal{F}_i$ квазикогерентны.

Задача 8.28. Покажите, что последовательность групп глобальных сечений, соответствующая точной последовательности (8.2), также точна.

Указание. $(i_* \widetilde{I^r})(X) = I^r$.

Наконец, заметим, что последовательность (8.2) с выброшенным $i_*\tilde{M}$ является вялой резольвентой пучка $i_*\tilde{M}$. В самом деле, все $\widetilde{I^r}$ будут вялыми пучками на U ввиду задачи 8.24, а их прямые образы будут вялыми ввиду следующего простого факта:

Задача 8.29. Пусть $i\colon U \hookrightarrow X$ — вложение открытого подмножества в топологическое пространство X и $\mathcal{F}$ — вялый пучок на U. Покажите, что пучок $i_*\mathcal{F}$ вял на X.

Сопоставляя результаты задач 8.27, 8.28 и 8.29, получаем, что $H^j(X, i_*(\tilde{M})) = 0$ при $i > 0$, что и требовалось.

9. Универсальное свойство когомологий

Определение когомологий пучков с помощью вялых резольвент оставляет ощущение неудовлетворенности: неясно, почему мы воспользовались именно вялыми пучками, и не получится ли других когомологий, если строить их с помощью резольвент из пучков другого типа. Сейчас мы покажем, что определенные нами когомологии обладают универсальным свойством (теорема 9.4); эту теорему можно рассматривать как еще одно (эквивалентное) определение когомологий, не привязанное к каком-то определенному типу резольвент. Это определение более естественно, чем данное нами в разд. 7, и, кроме того, ведет к важным обобщениям.

Условимся, что все комплексы, о которых пойдет речь далее, будут ограниченными снизу. Все пучки будут рассматриваться на фиксированном топологическом пространстве X.

Для начала чуть-чуть обобщим понятие резольвенты.

Определение 9.1. *Резольвентой* пучка $\mathcal{F}$ называется (ограниченный снизу) комплекс $K^\cdot$ вместе с квазиизоморфизмом $i\colon \mathcal{F} \to K^\cdot$ (в левой части пучок $\mathcal{F}$ рассматривается как комплекс, единственным ненулевым элементом которого является $\mathcal{F}$ в степени 0).

Задача 9.2. Пусть $\mathcal{K}^i = 0$ при $i < 0$. Покажите, что $\mathcal{K}^\cdot$ будет резольвентой пучка $\mathcal{F}$ в смысле нашего нового определения тогда же, когда и в смысле определения 7.5.

Задача 9.3. Пусть $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^\cdot$ — резольвента пучка $\mathcal{F}$ в смысле определения 9.1. Покажите, что существует квазиизоморфизм $j\colon \mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{L}^\cdot$, где $\mathcal{L}^i = 0$ при $i < 0$.

Указание. Положите $\mathcal{L}^0 = \mathcal{K}^0/d\mathcal{K}^{-1}$.

Теперь мы можем сформулировать основное свойство когомологий пучков.

Теорема 9.4. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на пространстве X, и пусть $m \geqslant 0$ — целое число. Тогда для всякой резольвенты $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^\cdot$ существует гомоморфизм $f_{\mathcal{K}^\cdot}\colon H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \to H^m(X, \mathcal{F})$. При этом набор гомоморфизмов $\{f_{\mathcal{K}^\cdot}\}_{\mathcal{K}^\cdot}$ обладает следующими свойствами:*

(1) Если $(\mathcal{K}^\cdot, i)$ — резольвента пучка $\mathcal{F}$ и $q\colon \mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{L}^\cdot$ — квазиизоморфизм, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \arrow[rr, "q_*"] \arrow[dr, "f_{\mathcal{K}^\cdot}"'] & & H^m(\Gamma(\mathcal{L}^\cdot)) \arrow[dl, "f_{\mathcal{L}^\cdot}"] \\ & H^m(X, \mathcal{F}) & \end{tikzcd}$$

коммутативна (здесь гомоморфизм $f_{\mathcal{L}^\cdot}$ соответствует резольвенте $(\mathcal{L}^\cdot, q \circ i)$, гомоморфизм q_* индуцирован гомоморфизмом q).

(2) Пусть H — абелева группа и пусть для всякой резольвенты $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{K}^\cdot$ существует гомоморфизм $g_{\mathcal{K}^\cdot}\colon H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \to H$, причем набор гомоморфизмов $\{g_{\mathcal{K}^\cdot}\}_{\mathcal{K}^\cdot}$ обладает тем свойством, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \arrow[rr, "q_*"] \arrow[dr, "g_{\mathcal{K}^\cdot}"'] & & H^m(\Gamma(\mathcal{L}^\cdot)) \arrow[dl, "g_{\mathcal{L}^\cdot}"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

коммутативны для всякого квазиизоморфизма $q\colon \mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{L}^\cdot$. Тогда существует и единствен гомоморфизм $\varphi\colon H^m(X, \mathcal{F}) \to H$, обладающий тем свойством, что $\varphi \circ g_{\mathcal{K}^\cdot} = f_{\mathcal{K}^\cdot}$ для всякой резольвенты $\mathcal{K}^\cdot$.

Эта теорема означает вот что. В качестве приближения к m-тым когомологиям пучка $\mathcal{F}$ можно взять $H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot))$, где $\mathcal{K}^\cdot$ — какая-нибудь резольвента пучка; чтобы получить не приближенное, а точное значение $H^m(X, \mathcal{F})$, надо перейти к пределу. Иными словами, $H^m(X, \mathcal{F})$

есть прямой предел групп $H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot))$ по множеству всевозможных $\mathcal{K}^\cdot$, являющихся резольвентами пучка $\mathcal{F}$. На самом деле буквально так сказать нельзя: в определении прямого предела по частично упорядоченному множеству подразумевается, что каждой паре сравнимых индексов соответствует ровно один гомоморфизм, в то время как в нашем случае две резольвенты $\mathcal{K}^\cdot$ и $\mathcal{L}^\cdot$ могут быть связаны многими разными квазиизоморфизмами. Если быть точным, теорема утверждает, что $H^m(X, \mathcal{F})$ есть предел функтора

$$\mathcal{K}^\cdot \mapsto H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)),$$

действующего из категории резольвент пучка $\mathcal{F}$ в категорию абелевых групп.

Можно также рассматривать теорему 9.4 как *определение* когомологий: именно, скажем, что $H^m(X, \mathcal{F})$ — это группа, удовлетворяющая условиям (1) и (2).

Задача 9.5. Покажите, что эта группа единственна, если она существует («единственность прямого предела!»).

Задача 9.6. Пусть мы рассматриваем теорему 9.4 как определение когомологий; покажите, что эквивалентное определение получится, если ограничиться только резольвентами вида $\mathcal{F} \to \mathcal{K}^\cdot$, в которых $\mathcal{K}^i = 0$ при $i < 0$ (то есть резольвентами в смысле задачи 7.5).

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.3: резольвенты в смысле задачи 7.5 образуют кофинальное подмножество в «множестве» всех резольвент.

Доказательство теоремы 9.4 основано на двух следующих утверждениях:

Утверждение 1. Для каждого (ограниченного снизу) комплекса пучков $\mathcal{K}^\cdot$ существуют ограниченный снизу комплекс $\mathcal{C}^\cdot$, состоящий из вялых пучков, и квазиизоморфизм $\mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{C}^\cdot$.

В ситуации, описанной в этом утверждении, будем говорить, что пара $(\mathcal{C}^\cdot, i)$ (или комплекс $\mathcal{C}^\cdot$) является *вялой резольвентой* комплекса $\mathcal{K}^\cdot$.

Утверждение 2. Пусть $\mathcal{E}^\cdot \xrightarrow{u} \mathcal{F}^\cdot$ и $\mathcal{E}^\cdot \xrightarrow{v} \mathcal{G}^\cdot$ — квазиизоморфизмы ограниченных снизу комплексов пучков. Тогда найдутся ограниченный снизу комплекс $\mathcal{M}^\cdot$ и квазиизоморфизмы $\mathcal{F}^\cdot \xrightarrow{v_1} \mathcal{M}^\cdot$ и $\mathcal{G}^\cdot \xrightarrow{u_1} \mathcal{M}^\cdot$

такие, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}^{\cdot} \arrow[dr, dashed, "v_1"] & \\
\mathcal{E}^{\cdot} \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & \mathcal{M}^{\cdot} \\
 & \mathcal{G}^{\cdot} \arrow[ur, dashed, "u_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

коммутативна с точностью до гомотопии (в дальнейшем будем говорить короче: гомотопически коммутативна).

Для начала выведем теорему из этих двух утверждений; этот вывод почти целиком сводится к формальным манипуляциям. Предпошлем выводу две простые технические леммы.

Задача 9.7. Пусть $\mathcal{C}^{\cdot}$ — ограниченный снизу ацикличный комплекс пучков, в котором все $\mathcal{C}^i$ являются вялыми. Покажите, что комплекс абелевых групп $\Gamma(\mathcal{C}^{\cdot})$ также ацикличен.

Указание. Разрежьте $\mathcal{C}^{\cdot}$ на короткие точные последовательности.

Задача 9.8. Пусть $\mathcal{C}_1^{\cdot} \xrightarrow{f} \mathcal{C}_2^{\cdot}$ — квазиизоморфизм ограниченных снизу комплексов, составленных из вялых пучков. Покажите, что индуцированный морфизм $\Gamma(\mathcal{C}_1^{\cdot}) \xrightarrow{f_*} \Gamma(\mathcal{C}_2^{\cdot})$ также является квазиизоморфизмом.

Указание. Рассмотрите конус морфизма f.

Выведем теперь теорему из утверждений 1 и 2. Начнем с ее первой части: пусть $i\colon \mathcal{F} \to \mathcal{K}^{\cdot}$ — резольвента пучка $\mathcal{F}$; построим гомоморфизм $f_{\mathcal{K}^{\cdot}}: H^m(\Gamma(\mathcal{K}') \to H^m(X, \mathcal{F})$. Сделаем это так. Обозначим через $j\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}^{\cdot}$ резольвенту Годемана пучка $\mathcal{F}$.

Задача 9.9. Выведите из утверждений 1 и 2, что существует гомотопически коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K}^{\cdot} \arrow[dr, "j_1"] & \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{C}_1^{\cdot} \\
 & \mathcal{C}^{\cdot} \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}
\tag{9.1}
$$

в которой i_1 и j_1 — квазиизоморфизмы и все пучки $\mathcal{C}_1^i$ вялые.

По определению, $H^m(X,\mathcal{F}) = H^m(\Gamma(\mathcal{C}^\cdot))$, а в силу задачи 9.8 гомоморфизм $(i_1)_*\colon H^m(\Gamma(\mathcal{C}^\cdot)) \to H^m(\Gamma(\mathcal{C}_1^\cdot))$ является изоморфизмом; положим теперь $f_{\mathcal{K}^\cdot} = (i_1)_*^{-1} \circ (j_1)_*$.

Задача 9.10. Диаграмма (9.1) не единственна; покажите, что гомоморфизм $f_{\mathcal{K}^\cdot}$ не зависит от произвола в ее выборе.

Указание. Пусть $k\colon \mathcal{C}_1^\cdot \to \mathcal{C}_2^\cdot$ — квазиизоморфизм, причем комплекс $\mathcal{C}_2^\cdot$ также состоит из вялых пучков. Покажите, что гомоморфизм $f_{\mathcal{K}^\cdot}$, определенный с помощью диаграммы (9.1), совпадает с таковым, определенным с помощью диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{K}^\cdot \arrow[dr, "j_2"] & \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{C}_2^\cdot \\
& \mathcal{C}^\cdot \arrow[ur, "k\circ i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Задача 9.11. Докажите утверждение (1) теоремы 9.4.

Указание. Постройте гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{L}^\cdot \arrow[dr] & \\
& \mathcal{K}^\cdot \arrow[ur, "q"] \arrow[dr] & & \mathcal{C}_2^\cdot \\
\mathcal{F}^\cdot \arrow[ur, "i"] \arrow[dr] & & \mathcal{C}_1^\cdot \arrow[ur] & \\
& \mathcal{C}^\cdot \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

в которой $\mathcal{C}^\cdot$ — резольвента Годемана пучка $\mathcal{F}$, все стрелки являются квазиизоморфизмами, и комплексы $\mathcal{C}_1^\cdot$ и $\mathcal{C}_2^\cdot$ состоят из вялых пучков.

Докажем, наконец, часть (2) теоремы 9.4. Пусть группа H удовлетворяет условию (2) теоремы; стало быть, для каждой резольвенты $\mathcal{K}^\cdot$ пучка $\mathcal{F}$ существует гомоморфизм $g_{\mathcal{K}^\cdot}\colon H^m(\Gamma(\mathcal{K}^\cdot)) \to H$, а нам нужно построить удовлетворяющий условиям гомоморфизм $\varphi\colon H^m(X,\mathcal{F}) \to H$. Положим $\varphi = g_{\mathcal{C}^\cdot}$, где $\mathcal{C}^\cdot$ — резольвента Годемана пучка $\mathcal{F}$.

Задача 9.12. Покажите, что гомоморфизм φ таков, как требуется в части (2) теоремы.

Итак, теорема 9.4 доказана. Остается доказать утверждения 1 и 2 (и рассказать по ходу дела о некоторых других полезных вещах).

Двойные комплексы

В этом разделе мы докажем утверждение 1.

Двойным комплексом $K^{\cdot\cdot}$ называется семейство абелевых групп (модулей, пучков …) K^{ij}, занумерованных парами целых чисел, и гомоморфизмов $\delta^{ij}\colon K^{ij} \to K^{i+1,j}$ и $d^{ij}\colon K^{ij} \to K^{i,j+1}$, удовлетворяющих таким условиям:

$$\begin{aligned} &\delta^{i+1,j} \circ \delta^{ij} = 0;\\ &d^{i,j+1} \circ d^{ij} = 0;\\ &d^{i+1,j} \circ \delta^{ij} = \delta^{i,j+1} \circ d^{ij}. \end{aligned}$$

Двойной комплекс $K^{\cdot\cdot}$ можно рассматривать как комплекс комплексов

$$\dots \to K^{i-1\cdot} \to K^{i\cdot} \to K^{i+1\cdot} \to \dots;$$

обратно, всякий комплекс комплексов мы можем (и будем) будем рассматривать как двойной комплекс.

Если $K^{\cdot\cdot}$ — двойной комплекс, то ему можно поставить в соответствие простой комплекс $sK^{\cdot}$ следующим образом. $(sK)^r = \bigoplus_{i+j=r} K^{ij}$, а дифференциал $d_{sK}\colon (sK)^r \to (sK)^{r+1}$ переводит $x \in K^{ij}$ в $\delta^{ij}(x) \oplus (-1)^i d^{ij}(x) \in K^{i+1,j} \oplus K^{i,j+1} \subset (sK)^{i+j+1}$.

Задача 9.13. Проверьте, что $sK^{\cdot}$ действительно является комплексом.

Задача 9.14. Проверьте, что конус гомоморфизма $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ есть простой комплекс, соответствующий двойному комплексу (т. е. комплексу комплексов)

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{-1}{K^{\cdot}} \xrightarrow{\ f\ } \underset{0}{L^{\cdot}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Двойные комплексы встречаются в жизни очень часто, но нам сейчас потребуется только одно их свойство:

Задача 9.15. Рассмотрим комплекс комплексов

$$0 \to K^{0\cdot} \to K^{1\cdot} \to K^{2\cdot} \to \dots.$$

Предположим, что все комплексы $K^{i\cdot}$ обладают тем свойством, что $H^p(K^{i\cdot}) = 0$ при $p > 0$ и $K^{iq} = 0$ при $q < 0$. Положим $F^i = H^0(K^{i\cdot})$. Докажите, что комплекс $0 \to F^0 \to F^1 \to \dots$ квазиизоморфен простому комплексу $sK^{\cdot}$, ассоциированному с двойным комплексом $K^{\cdot\cdot}$ (точнее говоря: естественное вложение $F^{\cdot} \hookrightarrow sK^{\cdot}$ является квазиизоморфизмом).

Указание. Объясним, для примера, почему при $r > 0$ отображение $H^r(F^\cdot) \to H^r(sK^\cdot)$ является эпиморфизмом. Итак, пусть $x = x^{0,r} + x^{1,r-1} + \dots + x^{r,0} \in sK^r$ является коциклом ($x^{ij} \in (K^i)^j$). Тогда, в частности, $d^{0,r}(x^{0,r}) = 0$, откуда, так как $H^r(K^{0\cdot}) = 0$, имеем $x^{0,r} = d^{0,r-1}y$, где $y \in (K^0)^{r-1}$. Рассматривая y как элемент $(sK)^{r-1}$, положим $x' = x - dy$. Тогда $x' \in sK^r$ — коцикл, гомологичный коциклу x, но при этом $(x')^{0,r} = 0$. Продолжая аналогично, можно убить все $x^{r-i,i}$, для которых $i > 0$.

Задача 9.16. Пусть $\mathcal{K}^\cdot$ — ограниченный снизу комплекс пучков. Покажите, что существует квазиизоморфизм $\mathcal{K}^\cdot \to \mathcal{C}^\cdot$, где $\mathcal{C}^\cdot$ — ограниченный снизу комплекс, состоящий из вялых пучков.

Указание. Сопоставим каждому из $\mathcal{K}^i$ его резольвенту Годемана; эти резольвенты образуют комплекс комплексов.

Итак, утверждение 1 доказано.

Конусы и треугольники

Чтобы доказать утверждение 2, нам придется поработать с конусами морфизмов. Начнем со следующего важного определения.

Определение 9.17. *Отмеченным треугольником* называется набор из трех комплексов K, L и M и морфизмов $u\colon K \to L$, $v\colon L \to M$ и $w\colon M \to K[1]$, удовлетворяющий следующем условию: существуют морфизм комплексов $f\colon E \to F$ и гомотопические эквивалентности $a\colon K \to E$, $b\colon L \to F$ и $c\colon M \to C(f)$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{u} & L & \xrightarrow{v} & M & \xrightarrow{w} & K[1] \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle a[1]}\downarrow \\ E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & C(f) & \xrightarrow{h} & E[1] \end{array} \tag{9.2}$$

коммутативна с точностью до гомотопии (здесь $C(f)$ — конус морфизма f, $g\colon F \to C(f)$ и $h\colon C(f) \to E[1]$ — отображения, описанные в задаче 1.23.

Нижнюю строчку диаграммы (9.2) мы будем называть *стандартным треугольником;* можно сказать, что отмеченный треугольник — это треугольник, гомотопически эквивалентный стандартному.

К этому определению необходимы некоторые комментарии. Во-первых, слово «комплекс» может означать комплекс абелевых групп, модулей, пучков, ... — и вообще, коль на то пошло, объектов любой данной абелевой категории. Во-вторых, мы в этом разделе считаем все комплексы ограниченными снизу; точно такое же определение годится, однако, и для комплексов, ограниченных сверху, или ограниченных с обеих сторон, или для произвольных комплексов.

Далее, отмеченные треугольники удобно изображать с помощью диаграмм наподобие такой:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "u"] & & L \arrow[dl, "v"] \\ & M \arrow[ul, "w"] & \end{tikzcd}$$

(кружочек при стрелке означает, что морфизм бьет не в K, а в $K[1]$).

Отметим, наконец, что иногда (особенно в устной речи) отмеченные треугольники называют просто треугольниками.

Установим некоторые свойства отмеченных треугольников.

Начнем с технического результата, показывающего, что стандартные треугольники гомотопных морфизмов будут гомотопически эквивалентны.

Задача 9.18. Пусть $f_1, f_2 \colon E \to F$ — два гомотопных морфизма. Покажите, что существует гомотопически коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{f_1} & F & \xrightarrow{g_1} & C(f) & \xrightarrow{h_1} & E[1] \\ \| & & \| & & \varphi\big\downarrow & & \| \\ E & \xrightarrow{f_2} & F & \xrightarrow{g_2} & C(f) & \xrightarrow{h_2} & E[1], \end{array}$$

в которой g_1 и h_1 (соответственно, g_2 и h_2) — канонические морфизмы, ассоциированные с конусом морфизма f_1 (соответственно, f_2), а φ — гомотопическая эквивалентность.

Указание. Все такие факты доказываются более или менее одинаково. Именно, пусть гомотопия между f_1 и f_2 задается набором гомоморфизмов $s^i \colon E^i \to F^{i-1}$, так что $f_1 - f_2 = ds + sd$. Нам требуется построить гомоморфизмы $\varphi^i \colon E^{i+1} \oplus F^i \to E^{i+1} \oplus F^i$. Запишем искомый гомоморфизм в виде 2×2-матрицы (см. с. 6) $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$, в которой $x \colon E^{i+1} \to E^{i+1}$, $z \colon E^{i+1} \to F^i$, и т. д., и подумаем, какими могли бы быть x, y, z и t. Начнем с y: поскольку никакого разумного гомоморфизма из F^i в E^{i+1} из условия извлечь нельзя, положим $y = 0$. Далее, z должно быть гомоморфизмом из E^{i+1} в F^i; по условию нам дан один такой гомоморфизм, а именно s^{i+1}; вот и положим $z = s^{i+1}$. Наконец, x и t — гомоморфизмы из E^{i+1} в E^{i+1} и из F^i в F^i соответственно; естественно попробовать положить оба морфизма тождественными (никаких других эндоморфизмов E^{i+1} или F^i в условии не дано). Итак, в качестве первой попытки положим $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Вообще говоря, могло бы оказаться, что наш первый выбор неудачен и что надо, например, сменить знак у s или заменить некоторые единицы минус единицами или нулями, но в данном случае мы сразу попали в точку: проверьте, что φ — гомоморфизм комплексов, что средний и правый квадраты коммутативны (даже «по-настоящему», а не с точностью до гомотопии; гомотопическая же коммутативность левого квадрата есть составная часть условия), а также что φ является гомотопической эквивалентностью (на самом деле даже изоморфизмом).

В дальнейшем рассуждения такого типа мы будем оставлять читателю.

Теперь сформулируем одно из основных свойств отмеченных треугольников, показывающее, что все три угла треугольника фактически равноправны:

Задача 9.19. Пусть

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "u"] & & L \arrow[dl, "v"] \\ & M \arrow[ul, "w"] & \end{tikzcd} \tag{9.3}$$

— отмеченный треугольник. Тогда треугольники

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "v"] & & M \arrow[dl, "w"] \\ & K[1] \arrow[ul, "-u[1]"] & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "w"] & & K[1] \arrow[dl, "-u[1]"] \\ & L[1] \arrow[ul, "-v[1]"] & \end{tikzcd}$$

также являются отмеченными.

Указание. Сначала сделайте это для случая, когда треугольник (9.3) является стандартным.

В примере 1.22 мы отмечали, что конусу морфизма комплексов $u\colon K \to L$ в топологии соответствует конус $C(u)$ отображения пространств $u\colon X \to Y$. При этом соответствии результату задачи 9.19 соответствует следующий (очевидный) топологический факт: конус естественного вложения $v\colon Y \hookrightarrow C(u)$ гомотопически эквивалентен надстройке ΣX (напомним, что надстройка соответствует сдвигу комплекса).

Зафиксируем полезное следствие из доказанного свойства треугольников.

Задача 9.20. Пусть в отмеченном треугольнике одна из вершин является ацикличным комплексом. Покажите, что противолежащая ей сторона является квазиизоморфизмом.

Второе важное свойство конусов удобнее иллюстрировать не геометрически, а алгебраически. Именно, как мы помним из задачи 1.26, конус вложения $i\colon K \hookrightarrow L$ квазиизоморфен факторкомплексу L/K. Следующая задача, результат которой называется «аксиомой октаэдра», показывает, как на языке конусов и треугольников выглядит общеизвестная теорема об изоморфизме: $(M/K)/(L/K) \cong M/L$, если $K \subset L \subset M$.

Задача 9.21. Пусть в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & & M' \arrow[dl, "e"'] \arrow[ddll, dashed, bend right, "u"'] & & \\
 & K \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"] & & L \arrow[ul, "a"'] \arrow[dl, "g"'] & \\
L' \arrow[ur, "d"] \arrow[rrrr, dashed, bend right, "v"'] & & M \arrow[ll, "c"'] \arrow[rr, "p"] & & K' \arrow[ul, "b"']
\end{tikzcd}$$

центральный треугольник гомотопически коммутативен, а три обрамляющих его треугольника являются отмеченными. Тогда существуют обозначенные пунктиром морфизмы $u\colon M' \to L'$ и $v\colon L' \to K'$ такие, что:

(1) Треугольник

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[dl, bend right, "u"'] & \\
L' \arrow[rr, bend right, "v"'] & & K' \arrow[ul, "a[1]\circ b"']
\end{tikzcd}$$

является отмеченным.

(2) Диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[ddl, bend right, "u"'] & \\
 & & L \arrow[ul, "a"'] \arrow[dl, "g"] \\
L' & M \arrow[l, "c"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & K[1] \arrow[r, "f[1]"] & L[1] & \\
L' \arrow[ur, "d"] \arrow[rrr, bend right, "v"'] & & & K' \arrow[ul, "b"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[dl, "e"] \arrow[ddl, dashed, bend right, "u"'] \\
K[1] & \\
L' \arrow[u, "d"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
L' \arrow[rr, dashed, bend right, "v"'] & M \arrow[l, "c"'] \arrow[r, "p"] & K'
\end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативны.

Указание. Сначала с помощью задачи 9.18 сведите все к случаю, когда центральный треугольник по-настоящему (а не только гомотопически) коммутативен, а три обрамляющих его треугольника являются стандартными (а не только отмеченными). Теперь все сводится к бесхитростным вычислениям в духе задачи 9.18.

Вот теперь можно доказать утверждение 2.

Задача 9.22. Пусть $u\colon E \to F$ и $v\colon E \to G$ — квазиизоморфизмы. Покажите, что существует комплекс M и квазиизоморфизмы $v_1\colon F \to M$ и $u_1\colon G \to M$ такие, что $v_1 \circ u$ гомотопно $u_1 \circ v$.

Указание. Пусть $C(u)$ — конус морфизма u, и пусть $a\colon F \to C(u)$ и $b\colon C(u) \to E[1]$ — естественные отображения. Тогда, в силу результата задачи 9.19, треугольник

$$\begin{tikzcd}
F[1] \arrow[dr, "-a[1]"] & \\
& C(u) \arrow[dl, "b"] \\
E[1] \arrow[uu, "-u[1]"] &
\end{tikzcd}$$

является отмеченным. Теперь применим аксиому октаэдра к коммутативному треугольнику, состоящему из комплексов $C(u)$, $E[1]$ и $G[1]$ и морфизмов b, $v[1]$ и $w = v[1]\circ b$. В результате получится, что существуют обозначенные пунктиром морфизмы:

$$\begin{tikzcd}
F[1] \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, "-a[1]"] & & C(w) \arrow[dl] \arrow[ddl, dashed, bend left] \\
& C(u) \arrow[dl, "b"] \arrow[dr, "w"] & \\
E[1] \arrow[uu, "-u[1]"] \arrow[rr, "v{[1]}"] & & G[1] \arrow[uu, "g"'] \arrow[dl] \\
& C(v[1]) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Выведите из аксиомы октаэдра, что f и g являются квазиизоморфизмами и что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
F[1] \arrow[r, "f"] & C(w) \\
E[1] \arrow[u, "-u[1]"] \arrow[r, "v[1]"] & G[1] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
\tag{9.4}
$$

гомотопически коммутативна. Чтобы получить из (9.4) то, что нужно, остается сделать сдвиг и сменить знак у некоторых морфизмов.

Итак, утверждение 2 и теорема 9.4 доказаны.

Теорема 9.4 указывает путь к различным обобщениям когомологий пучков. Например, если рассматривать эту теорему как определение когомологий, то не обязательно считать, что $\mathcal{F}$ в ее условии — один-единственный пучок. С тем же успехом можно считать, что $\mathcal{F}^{\cdot}$ — ограниченный снизу комплекс пучков (резольвентами комплекса $\mathcal{F}^{\cdot}$ при этом будут называться квазиизоморфизмы вида $\mathcal{F}^{\cdot} \to \mathcal{K}^{\cdot}$). В результате получится определение того, что называется m-той *группой гиперкогомологий* комплекса $\mathcal{F}^{\cdot}$ и обозначается $\mathbb{H}^m(X, \mathcal{F}^{\cdot})$ или попросту $H^m(X, \mathcal{F}^{\cdot})$. С другой стороны, если $\mathcal{F}^{\cdot}$ — комплекс пучков на пространстве X и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то, беря предел пучков на пространстве Y вида $H^m(f_*\mathcal{K}^{\cdot})$, где $\mathcal{K}^{\cdot}$ пробегает все резольвенты комплекса $\mathcal{F}^{\cdot}$, получим *высшие прямые образы* комплекса $\mathcal{F}^{\cdot}$ (или пучка $\mathcal{F}$, если комплекс сводится к единственному пучку) при отображении f; они обозначаются $R^m f_*(\mathcal{F}^{\cdot})$. Легко видеть, что $R^0 f_*\mathcal{F} = f_*\mathcal{F}$ в случае, когда $\mathcal{F}$ — один-единственный пучок.

Более того, и теорема 9.4, и упомянутые выше ее обобщения являются фрагментами из большой теории. По-русски эта теория прекрасно изложена в книге [3]; краткое и изящное (но совсем без доказательств) изложение основ можно найти в записках ее создателя Ж.-Л. Вердье (ученика Гротендика). Эти записки опубликованы в томе 569 серии “Lecture notes in mathematics”.