Список задач по курсу В. Васильева "Топология. Доп. главы"

Эадачи разбирайте сами, по 3 на человека, по совести, то есть чтобы среди них не было однотипных или чтобы первый не выбрал себе все самые простые задачи. В случае чего, я оставляю за собой право добавить еще задач из списка и не только.

1. Пусть непрерывное отображение $f : X \to Y$ фильтрованных пространств уважает фильтрацию, т.е. $f(F_iX) \subset F_iY$ для всех i, и при некотором r соответствующее отображение гомологических спектральных последовательностей $E^r_{p,q}$ является изоморфизмом для всех p, q. Доказать, что тогда то же верно и для всех $r' > r$ и отображение f задает изоморфизм $H_*(X) \simeq H_*(Y)$.

2. Посчитать спектральную последовательность расслоения над ориентированным грассманианом $G_2^+(\mathbf{R}^2)$, слой которого над плоскостью K — это пространство всех положительно ориентированных ортонормальных реперов в плоскости K (гомеоморфное, конечно, $SO(\mathbf{R}^2) \sim S^1$).

3. Посчитать спектральную последовательность расслоения над грассманианом $G_2(\mathbf{C}^2)$, слой которого над плоскостью K — это пространство всех реперов в плоскости K (гомеоморфное, конечно, $GL(C^2) \sim U(3) \sim S^1 \times S^3$).

4. Для любого набора из k натуральных чисел $m_1, \ldots, m_k$ рассмотрим пространство систем из k вещественных полиномов вида

$$\left\{ \begin{array}{c} x^{m_1} + a_{1,1}x^{m_1-1} + \cdots + a_{1,m_1}, \\ \cdots \\ x^{m_k} + a_{1,k}x^{m_k-1} + \cdots + a_{k,m_k}. \end{array} \right. \tag{1}$$

   $(k \geq 2)$ без кратных корней. Доказать, что два таких пространства, соответствующие наборам $m_1, \ldots, m_k$ и $m'_1, \ldots, m'_k$, гомотопически эквивалентны друг другу если $\min(m_i) = \min(m'_i)$.

5. Вычислить $H^*(\mathbf{C}^2 \setminus n$ комплексных аффинных прямых в общем положении) (т.е. среди них нет параллельных и в каждой точке пересекается не более двух).

6. Вычислить $H^*(\mathbf{C}^n \setminus (\bigcup_{1\le i<j\le n}(\{x_i = x_j\} \bigcup \{x_i = x_j + 1\}))$

7. Вычислить $H^*((\mathbf{R}^m)^n \setminus (\bigcup_{1\le i<j\le n}\{x_i = x_j\} \bigcup \bigcup_{1\le i\le n}\{x_i = 0\})$, где все $x_i \in \mathbf{R}^m$.

8. Вычислить $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus \{x^2 = y^3\})$.

9. Верно ли, что $\pi_1(\mathbf{C}^2 \setminus \{x^2 = y^3\})$ — пространство типа $K(\pi, 1)$?

10. Вычислить когомологии пространства всех вещественных полиномов вида $x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d$ без k-кратных нулей и k-кратных единиц (то есть точек где $f = 1, f' = \cdots = f^{k-1} = 0$).

11. Вычислить $H^*(B(\mathbf{R}^n, 3), \mathbf{Z}_2)$ для любого n

12. Доказать, что два пространства вещественных полиномов вида $x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d$ без k-кратных корней для разных d гомотопически эквивалентны друг другу если соответствующие значения $[d/k]$ совпадают.

13. Доказать, что два пространства комплексных полиномов вида $x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d$ без k-кратных корней для разных d гомотопически эквивалентны друг другу если соответствующие значения $[d/k]$ совпадают.

14. Вычислить гомологии пространства вещественных полиномиальных систем вида (1) с $m_1 = \cdots = m_k = 3k$, таких что ни один из полиномов не имеет k-кратных корней, а вся система не имеет общих корней.

15. Сколько компонент дополнения у набора из k аффинных гиперплоскостей общего положения в $\mathbf{R}^n$?

16. В $\mathbf{R}^n$ имеется m выпуклых подмножеств, и про любые k из них, $k \le m$, известно, имеют ли они общую точку. Достаточно ли этой информации, чтобы вычислить гомологии их объединения? Гомотопический тип? Гомотопический тип дополнения? (Предполагается, что множества — не извращенные, например, что их объединение — CW-комплекс, а пересечение любого набора их — его подкомплекс).

17. Вычислить когомологии пространства всех вещественных полиномов $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ степени 5 со старшим коэффициентом 1, таких что для некоторого $x \in \mathbf{R}^1$ $f(x) = f(x+1)$, $f'(x) = f'(x+1)$

18. Вычислить когомологии пространства квадратичных форм $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^1$, не кратных никакой линейной форме.

19. Вычислить когомологии пространства квадратичных форм $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1$, не кратных никакой линейной форме.

20. Вычислить когомологии пространства кубичных форм $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^1$, не кратных никакой квадратичной форме.

21. Вычислить когомологии пространства линейных операторов $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ранга ≥ 2.

22. Вычислить когомологии пространства линейных операторов $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ ранга ≥ 2.

23. Вычислить $H^*(Br(6), \mathbf{Z}_2)$

24. Вычислить $H^*(Br(5), \mathbf{Z})$

25. Вычислить $H^*(\Omega(\mathbf{R}^3 \setminus \{\text{две точки}\}))$

26. Вычислить $H^*(\mathbf{R}^6 \setminus \bigcup_{1 \leq i < j < k \leq 6} \{x_i = x_j = x_k\})$

27. Вычислить
$$H^*(\mathbf{R}^6 \setminus (\bigcup_{1 \leq i < j < k \leq 6} \{x_i = x_j = x_k\} \bigcup \bigcup_{1 \leq i < j \leq 6} \{x_i = x_j = 0\}))$$

28. Вычислить $H^*(B(\mathbf{CP}^2, 2))$

29. Вычислить $H^*(\tilde{B}(\mathbf{CP}^2, 3))$, где $\tilde{B}(\mathbf{CP}^2, k)$ — пространство наборов из k точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой)

30. Вычислить $H^*(\tilde{B}(\mathbf{CP}^2, 4))$

31. Вычислить $H^*(B(\mathbf{CP}^2, 2), \pm\mathbf{Z})$, где $\pm\mathbf{Z}$ — локальная система групп на пространстве $B(X, k)$, локально изоморфных $\mathbf{Z}$, но переворачивающихся над путями, определяющими нечетную перестановку k точек

32. Вычислить $H^*(\tilde{B}(\mathbf{CP}^2, 3), \pm\mathbf{Z})$

33. Вычислить $H^*(\tilde{B}(\mathbf{CP}^2, 4), \pm\mathbf{Z})$

34. Вычислить когомологии множества наборов из 4 прямых общего положения в $\mathbf{RP}^2$

35. Вычислить когомологии множества наборов из 3 прямых общего положения в $\mathbf{RP}^2$

36. Вычислить когомологии множества строго морсовских тригонометрических полиномов $S^1 \to \mathbf{R}^1$ степени ≤ 3

37. Вычислить когомологии пространства гладких функций $S^1 \to \mathbf{R}^1$ без k-кратных нулей, $k \geq 3$

38. Вычислить когомологии пространства строго морсовских полиномов $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ степени 6 со старшим коэффициентом 1

39. Вычислить когомологии пространства строго морсовских полиномов $\mathbf{C}^1 \to \mathbf{C}^1$ степени 4 со старшим коэффициентом 1